Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2019 года. Решения задач

11 класс

11-1. Даны три числа. Если каждое из них уменьшить на 1, то их произведение тоже уменьшится на 1. Если все исходные числа уменьшить на 2, то их произведение тоже уменьшится на 2.

а) На сколько уменьшится произведение, если все исходные числа уменьшить на 3?

б) Укажите какие-нибудь три числа, удовлетворяющие условию задачи.

Ответ: а) на 9; б) 1, 1, 1.

Решение. а) Пусть нам даны изначально числа a, b и c. Обозначим $ab + bc + ca = x$ и $a + b + c = y$. По условию $(a - 1)(b - 1)(c - 1) = abc - 1$ и $(a - 2)(b - 2)(c - 2) = abc - 2$. Раскрывая скобки и сокращая подобные слагаемые, получим $x - y = 0$ и $-2x + 4y = 6$, откуда $x = y = 3$. Тогда нужная нам разность равна $abc - (a - 3)(b - 3)(c - 3) = 3x - 9y + 27 = 3\cdot3 - 9\cdot3 + 27 = 9$.

б) Подходят, например, числа $a = b = c = 1$. Замечание. Можно доказать, что приведённый набор действительных чисел — единственный.

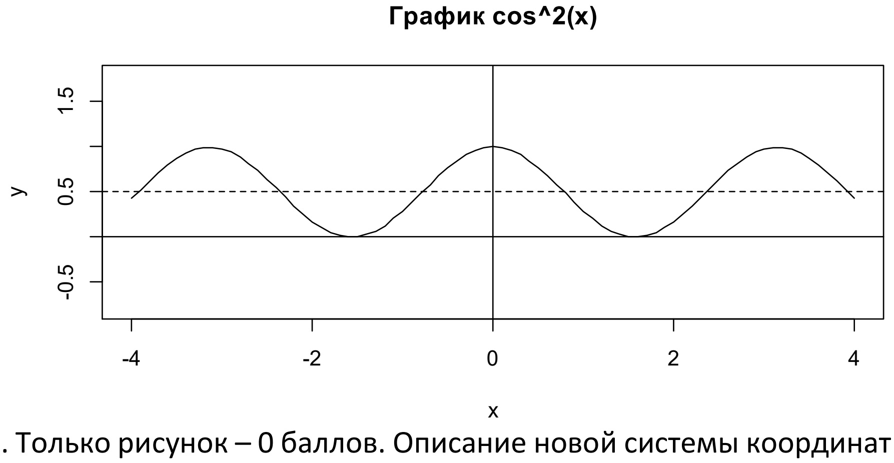
Критерии. За каждый правильный ответ в пунктах а) и б) – по 2 балла. Доказано соотношение $ab + bc + ca = a + b + c = 3$ – 3 балла.

11-2. В некоторой системе координат построили график функции $y = \cos^2 x$. После чего координатные оси стерли. Постройте систему координат так, чтобы эта же линия стала графиком функции $z = \cos t$ в новой системе координат.

Решение. Имеем $y = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Мы можем теперь положить $2x = t$, $y = (z + 1)/2$, тогда переменные z и t связаны соотношением $z = cos\ t$, то есть пара (t, z) задает положение точки в искомой системе координат.

Мы видим, что $t = 0$ при $x = 0$, и $t = 1$ при $x = 2$. Это значит, что эталон по оси x уменьшился вдвое, а точка отсчета осталась на том же уровне.

С другой стороны, значение $z = 0$ (начало отсчета) соответствует $y = 1/2$, а значение $z = 1$ – координате $y = 1$. Таким образом, по оси Oy эталон также уменьшился вдвое, но ось сместилась на 1/2 вверх (в смысле старой системы координат).



Критерии. Только рисунок – 0 баллов. Описание новой системы координат без обоснования – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

11-3. Действительные числа a, b и c таковы, что $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ и $|c| \geq |a + b|$. Докажите, что $a + b + c = 0$.

Решение. Возведём в квадрат обе части каждого неравенства:

$$\begin{cases} a^2 \geq (b+c)^2 \\ b^2 \geq (c+a)^2 \\ c^2 \geq (a+b)^2 \end{cases}$$

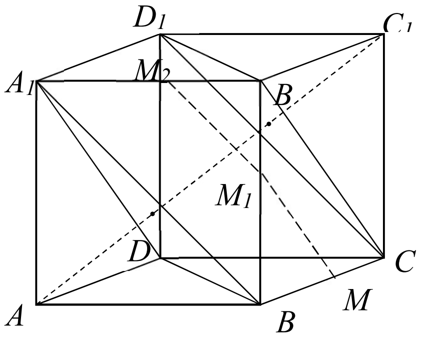
Сложим все три неравенства и после перегруппировки слагаемых получим $(a + b + c)^2 \le 0$. Отсюда, очевидно, следует, что $a + b + c = 0$.

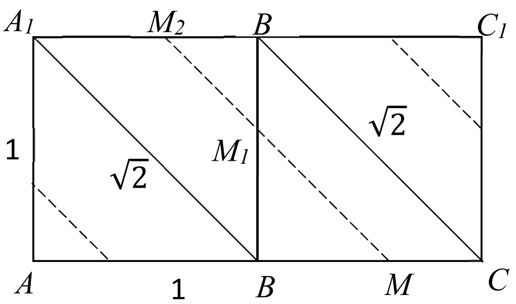
Критерии. Полный ответ без достаточного обоснования – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

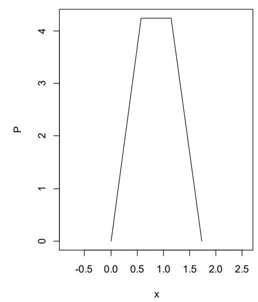
11-4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 проведена диагональ AC_1. Для каждой точки N, лежащей на этой диагонали, построено сечение куба плоскостью, перпендикулярной AC_1 и проходящей через N. Пусть P – периметр этого сечения. Постройте график зависимости P от величины $x = AN$.

Решение. Заметим, что сечения BDA_1 и B_1D_1A перпендикулярны диагонали AC_1 и делят ее на три равные части, каждая длиной $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Достаточно рассмотреть след, который сечение оставляет на двух гранях, например, ABB_1A_1 и BCC_1B_1, весь периметр сечения в три раза больше. Все сечения параллельны между собой. Следы проходят под углом 45° к ребрам.

С ростом x сначала сечение имеет форму правильного треугольника, периметр которого растет пропорционально x. Самое большое сечение – то, которое проходит через точки B, D и A_1, его периметр равен $3\sqrt{2}$, тот же периметр у треугольника B_1D_1C.







Итак, при $0 \le x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$ имеем $P = 3\sqrt{6}x$, при $\frac{\sqrt{3}}{3} \le x \le \frac{2\sqrt{3}}{3}$ имеем $P = 3\sqrt{2}$, при $\frac{2\sqrt{3}}{3} \le x \le \sqrt{3}$ имеем $P = 3\sqrt{6}(\sqrt{3} - x)$.

Критерии. Полный ответ без достаточного обоснования – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

11-5. Дед Мороз готовит подарки. Он разложил 115 конфет в пакеты, причем все они разные по числу конфет. В трех самых маленьких подарках находится 20 конфет, в трех самых больших – 50. Во сколько пакетов разложены конфеты? Сколько конфет в самом маленьком подарке?

Ответ. 10 пакетов, 5 конфет.

Решение. Пронумеруем подарки от меньшего к большему, от 1 до n. Если в третьем 7 или меньше конфет, то в трех меньших подарках не более 7 + 6 + 5 = 18 конфет. Противоречит условию. Итак, в третьем подарке не менее 8 конфет. Аналогично, в третьем с конца подарке не более 15 конфет (16 + 17 + 18 = 51 > 50).

Уберем три самых больших и три самых маленьких подарка. В оставшихся будет 115 – 20 – 50 = 45 конфет, причем в каждом от 9 до 14. Трех пакетов явно не хватит (14 + 13 + 12 = 39), а пять будет лишнего (9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55). Значит, 45 конфет разложено в 4 пакета. Это возможно: 47 = 9 + 11 + 12 + 13. Заметим, что в четвертом пакете не может быть более 9 конфет: 10 + 11 + 12 + 13 = 46 > 45).

Если в четвертом пакете 9 конфет, то в третьем не больше 8, во втором – не больше 7, так что в первом пакете – не менее 20 – 8 – 7 = 5 конфет. Но и не более, так как 6 + 7 + 8 = 21.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только правильные оценки для a_3 и a_{n-3} – 3 балла. Только обоснованный ответ для числа пакетов – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.