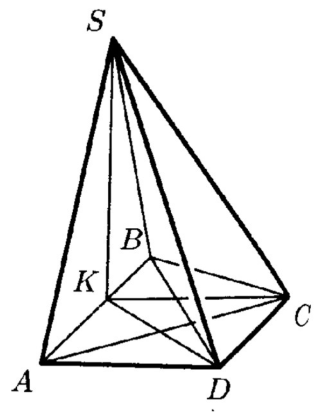
11 класс

11.1. Ответ: $x = 2$.

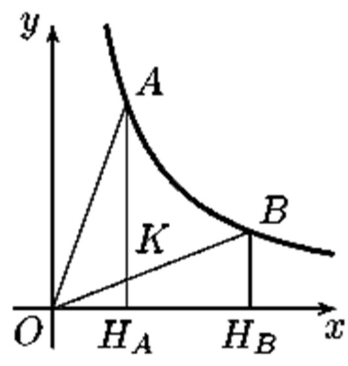
Левая часть исходного неравенства определена при $x = 2$ и. В точке $x = 2$ неравенство верно. Докажем, что на отрезке $[0;1]$ решений нет. Для этого возведём обе части в квадрат и приведём неравенство к виду $x^2(1-x) < -1$. Последнее неравенство при $x \in [0;1]$ не выполняется.

11.2. Условие $\angle ADS = \angle BDS$ означает, что проекция K точки S на плоскость $ABCD$ лежит на биссектрисе угла $\angle ADB$, а условие $\angle ACS = \angle BCS$ – что точка K лежит на биссектрисе угла $\angle ACB$. Условие $BC \cdot AD = BD \cdot AC$, эквивалентное $AD : BD = AC : BC$, означает, что эти биссектрисы пересекаются на стороне AB. Таким образом, плоскость SAB содержит прямую SK, перпендикулярную плоскости основания.



11.3. Число попарных разностей равно 11·10/2 = 55 (каждое из 11 чисел образует разность с десятью остальными, и при этом каждая разность оказывается подсчитана два раза). Максимальный модуль разности равен 19, минимальный – 1, и различных значений получается 19. Но при этом разность 19 может быть получена единственным способом: 19 = 20 – 1, разность 18 может быть получена двумя способами: 18 = 20 – 2 = 19 – 1. Значит, на остальные 17 значений приходится не менее 52 разностей, и какое-то из них встретится 4 раза.

11.4. Можно считать, что абсцисса точки A меньше абсциссы точки B. Пусть K – точка пересечения отрезков AH_A и OB. Так как $OH_A \cdot AH_A = OH_B \cdot BH_B = 1$, то площади треугольников OAH_A и OBH_B равны, а значит, равны площади треугольника OAK и трапеции H_AKBH_B, из чего следует равенство указанных фигур.



11.5. Ответ: Петя

Воспользуемся ретроспективным анализом (анализом с конца). Имеющий при своём ходе число от 99 до 999 выиграет, имеющий 49, …, 98 проиграет, имеющий 4, …, 48 выиграет, имеющий 2, 3 проиграет, имеющий 1 выиграет. Таким образом, выигрывает начинающий игру Петя.