Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2019/20 учебный год

11 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Рассматриваются квадратные трёхчлены вида $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами, при этом $p + q = 30$. Сколько таких трёхчленов имеют целые корни?

Решение. Пусть x_1 и x_2 – целые корни трёхчлена вида $x^2 + px + q$. Тогда $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1x_2$. Следовательно, $30 = p + q = (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1$, т. е. $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 31$. Так как число 31 – простое, оно может быть представлено в виде произведения двух целых чисел только следующим образом: $31 = 1 \cdot 31 = (-1) \cdot (-31)$. В первом случае получаем, что корнями трёхчлена являются числа 2 и 32 ($x^2 - 34x + 64$), а во втором случае – числа 0 и – 30 (трёхчлен $x^2 + 30x$).

Ответ. Два трёхчлена: $x^2 - 34x + 64$ и $x^2 + 30x$.

2. УСЛОВИЕ

Найдите какую-нибудь функцию $f(x)$, для которой уравнения $f(x) = 0$ и $f\,'(x) + x^2 + 1 = 0$ имеют одно и то же непустое множество корней.

Решение. Действительно, уравнения $-x = 0$ и $(-x)' + x^2 + 1 = 0$ оба имеют единственный корень $x = 0$.

Ответ. Например, $f(x) = -x$.

3. УСЛОВИЕ

В какое наименьшее количество цветов нужно раскрасить натуральные числа так, чтобы любые два числа, разность между которыми равна 3, 4 или 6, были разного цвета?

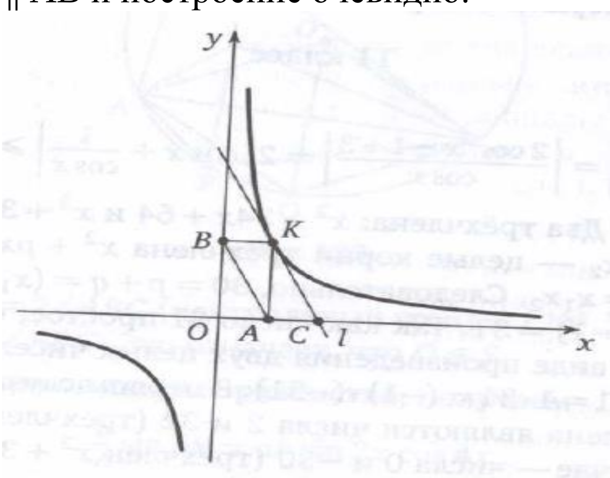
Решение. Пусть число $n = 1$ – цвета A, тогда в другой цвет должны быть покрашены числа 4, 5 и 7. Пусть $n = 4$ – цвета B, тогда из того, что $7 - 4 = 3$, следует, что число $n = 7$ – третьего цвета C. Итак, потребуется не менее 3 цветов. Раскраска *AAABBBCCCAAABBB…* искомая.

Ответ. 3.

4. УСЛОВИЕ

На листе нарисованы координатные оси и ветви гиперболы $y = k/x$ (k неизвестно, масштаб по координатным осям также не указан). На одной из ветвей отмечена точка. С помощью циркуля и линейки постройте касательную к гиперболе в отмеченной точке.

Решение. Пусть A и B – проекции отмеченной точки K на координатной оси. Покажем, что касательная l к гиперболе параллельна AB.
Действительно, пусть $K(x_0, k/x_0)$, $A(x_0, 0)$, $B(0, k/x_0)$ – координаты этих точек, тогда $tg \angle BAO = k/x_0^2$. С другой стороны, $tg \angle KCO = -f'(x_0) = -(-k/x_0^2) = k/x_0^2 = tg \angle BAO$. Значит, $l \parallel AB$ и построение очевидно.



5. УСЛОВИЕ

В единичный квадрат бросили 51 точку. Доказать, что некоторые три из них обязательно лежат внутри круга радиуса 1/7.

Доказательство. Разобьём квадрат на 25 равных квадратиков со стороной 1/5. Тогда найдется один из этих квадратиков, в который попадает не меньше трёх точек (ибо $51 > 2\cdot 25$). Круг, описанный около этого квадратика, содержит не менее трёх точек и имеет радиус $r = \sqrt{(1/50)} < \sqrt{(1/49)} = 1/7$.

6. УСЛОВИЕ

Существуют ли натуральные a и b, большие 1000, и такие, что для любого c, являющегося точным квадратом, три числа a, b и c не являются длинами сторон треугольника?

Решение. Пример. $a = 10\,000^2 + 10\,000$, $b = 1001$. Предположим, существует такое $c = d^2$, что числа a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника. Тогда должны выполняться неравенства треугольника $a + b > c$,

$b + c > a$, $a + c > b$. Рассмотрим первые два из них: $a + b > c$ и $c > a - b$. Заметим, что $a + b = 10\,000^2 + 10\,000 + 1001 < 10\,000^2 + 10\,000 + 10\,000 + 1 = 10001^2$ и $a - b = 10\,000^2 + 10\,000 - 1001 > 10\,000^2$.

Но тогда $10\,001^2 > a + b > c > a - b > 10\,000^2$, т. е. $10\,001^2 > d^2 > 10\,000^2$. Это невозможно.

Ответ. Существуют.

Замечание. Существуют и другие примеры.