

Муниципальный этап Российской олимпиады по математике

2019-20 учебного года

7 класс (время решения – 4 часа)

1. Двуглавые и семиглавые драконы пришли на собрание. В самом начале собрания одна из голов одного из семиглавых драконов пересчитала все остальные головы. Их оказалось 25. Сколько всего драконов пришло на собрание?

Ответ: 8 драконов. *Решение.* Вычтем из 25 голов, подсчитанных семиглавым драконом, 6 принадлежащих ему голов. Останется 19 голов. Все оставшиеся драконы не могут быть двухговыми (19 - нечетное число). Семиголовый дракон может быть еще только 1 (если 2, то для двухголовых останется нечетное число голов. А для трех семиголовых не хватает голов ($7 \cdot 3 = 21 > 19$)). Вычтем из 19 голов 7 голов этого единственного дракона и получим общее количество голов, принадлежащих двухговым драконам. Следовательно, 2-головых драконов: $(19 - 7) : 2 = 6$. Итого: $6 + 1 + 1 = 8$ драконов.

Критерии проверки: Полное решение – 7 баллов. Только ответ – 2 балла.

2. Трехзначное число X было записано тремя различными цифрами ABC . Четыре школьника сделали следующие заявления. Петя: «Самая большая цифра в записи числа X – это B ». Вася: « $C = 8$ ». Толя: «Самая большая цифра – C ». Дима: « C есть среднее арифметическое чисел A и B ». Найдите число X , если известно, что ровно один из ребят ошибся.

Ответ: 798. *Решение.* Если Толя сказал правду и наибольшее число – C , то сразу двое (Петя и Дима) ошиблись, чего быть не может, значит, ошибся Толя, а остальные сказали правду. Т.о. число $C = 8$; B – наибольшее число, т.е. $B = 9$; C – среднее арифметическое чисел A и B , т.е. $A = 2C - B = 7$

Критерии проверки: Полное решение – 7 баллов. Доказано, что ошибиться мог только Толя – 4 балла. Только ответ – 2 балла.

3. Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя 2 минуты был ближе к первому фотографу, затем 3 минуты — ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг?

Решение. Разделим обе дуги окружности между фотографами пополам. Половинки дуг, прилежащие ко второму фотографу, составляют половину дистанции. Эту половину Володя пробежал за 3 минуты, значит, весь круг он пробежит за 6 минут.

Ответ: за 6 минут.

Критерии проверки: Полное решение – 7 баллов. Только ответ – 2 балла.

4. В белом квадрате 5x5 маляр хочет закрасить некоторые клетки в зелёный цвет так, чтобы в каждом квадрате 3x3 белых клеток было больше, чем зелёных, а в каждом квадрате 4x4 зелёных клеток было больше, чем белых. Помогите маляру.

3	3		3	3
3	3		3	3
3	3		3	3
3	3		3	3

Решение. Годится, например, такая раскраска (см. рис.)

Критерии проверки: Верный пример даже без каких-либо пояснений – 7 баллов, в остальных случаях – 0 баллов.

5. В классе 30 учеников. Они сидят за 15 партами так, что ровно половина всех девочек класса сидят с мальчиками. Докажите, что их не удастся пересадить (за те же 15 парт) так, чтобы ровно половина всех мальчиков класса сидели с девочками.

Решение. Поскольку парт 15, а учеников 30, все ученики сидят по двое, никто не сидит один. Ровно половина девочек сидит с мальчиками, значит, остальные девочки сидят друг с другом. Поскольку половина всех девочек четное число, получаем, что количество девочек делится на 4. Если бы мы смогли рассадить мальчиков так, чтобы ровно половина мальчиков сидела с девочками, то аналогичными рассуждениями мы бы доказали, что количество мальчиков делится на 4. Но если количество мальчиков делится на 4, количество девочек делится на 4, то и количество учеников в классе должно делиться на 4, а это не так. Противоречие. Значит, нельзя пересадить учеников так, чтобы ровно половина мальчиков сидела с девочками.

Критерии проверки: Верный ответ со всеми необходимыми объяснениями – 7 баллов. Доказано, что количество девочек делится на 4, однако дальнейшие выводы не сделаны или сделаны с логическими ошибками – 3 балла.