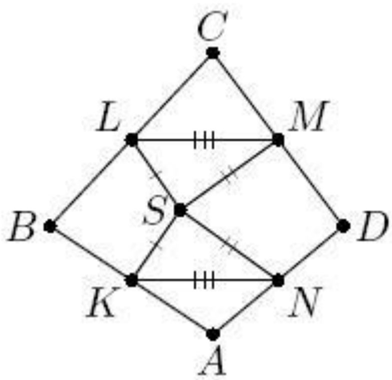
Решение 8 класс

1. Подойдут, например, числа 1, 2, 3 и 5. Действительно, значения всех трех выражений $1\cdot2+3\cdot5=17$, $1\cdot3+2\cdot5=13$ и $1\cdot5+2\cdot3=11$ являются простыми числами.

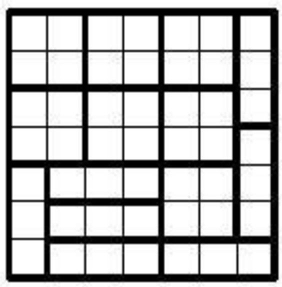
2. Заметим, что отрезок KN является средней линией треугольника BAD. Значит, $KN=\frac{BD}{2}$. Аналогично, из треугольника BCD получаем $LM=\frac{BD}{2}$. Но тогда треугольники

KSN и MSL равны по трем сторонам (см. рис.). Отсюда следует требуемое равенство соответствующих углов.



3. Ответ. При n, делящихся на 7.

Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x+3x=7x=n^2$. Значит, n должно делиться на 7.Если же n делится на 7, то пол уложить можно. Достаточно заметить, что квадрат 7×7 можно уложить, используя по 7 плиток каждого вида (см. рис.). А квадрат $7k\times7k$ можно разрезать на квадраты 7×7.



4. Первое решение. Так как $abc < 0$, то либо одно из чисел a, b, c отрицательно, либо все три. Но $a + b + c = 0$, поэтому все три числа отрицательными быть не могут. Пусть, без ограничения общности, $a > 0$, $b > 0$ и $c < 0$. Нам нужно доказать, что

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>0.$$ Или $$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>-\frac{a^2+b^2}{c}=\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$ Так как $a>0$ и $b > 0$, то $\frac{b^2+c^2}{a} > \frac{b^2}{a} > \frac{b^2}{a+b}$. Аналогично, $\frac{c^2+a^2}{b} > \frac{a^2}{b} > \frac{a^2}{a+b}$. Сложив два полученных неравенства, получим требуемое.

.

Второе решение. Перепишем числитель первой дроби в виде $(a+b)^2-2ab=(-c)^2-2ab=c^2-2ab$. Тогда первую дробь можно преобразовать к виду $c-\frac{2ab}{c}$, а сумму дробей – к виду

$$\left(c-\frac{2ab}{c}\right)+\left(a-\frac{2bc}{a}\right)+\left(b-\frac{2ca}{b}\right)=(a+b+c)-2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)=-2abc\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Выражение в скобках положительно, а произведение abc , по условию, отрицательно, откуда и следует утверждение задачи.

Замечание. Можно заметить, что, если c отрицательно, а a и b положительны, то

$|c|=a+b>a$. Поэтому $\frac{b^2+c^2}{a}>-\frac{b^2+a^2}{c}$; кроме того, $\frac{c^2+a^2}{b}>0$.

5. Ответ. Не могут.

Покажем, как играть Пете, чтобы он смог забрать со стола последнюю монету независимо от игры Васи и Толи. Пусть первым ходом Петя возьмет 4 монеты. Заметим, что Вася и Толя за свои ходы суммарно могут взять от 2 до 4 монет. Это значит, что после первого хода Толи на столе останется от 292 до 294 монет. После этого Пете нужно взять 2, 3 или 4 монеты так, чтобы на столе осталось 290 монет. А теперь, если Вася и Толя будут брать суммарно 2, 3 или 4 монеты, Пете нужно брать соответственно 3, 2 или 1 монету, чтобы после каждого его хода число монет, остающихся на столе, делилось на 5. Таким образом, он оставит 285, 280, …, 5 и, наконец, 0 монет, то есть заберет со стола последнюю монету.