

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019-2020 ГГ.  
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП.  
8-Й КЛАСС**

**№ 1.** Найдите значение выражения

$$\left( \frac{20192019,2019 + \frac{19201920,1920}{20192019,2019} - \frac{20192019,2019 - \frac{19201920,1920}{20192019,2019}}{20192019,2019 - \frac{19201920,1920}{20192019,2019}} \right) \cdot \left( \frac{20192019,2019^2 - \left( \frac{19201920,1920}{20192019,2019} \right)^2}{19201920,1920} \right)$$

Решение:

Обозначим  $20192019,2019 = a$ ,  $\frac{19201920,1920}{20192019,2019} = b$ . Тогда:

$$\left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) \cdot \left( \frac{a^2 - b^2}{ab} \right) = \left( \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{a^2 - b^2} \right) \cdot \left( \frac{a^2 - b^2}{ab} \right) = \frac{4ab}{ab} = 4.$$

**Ответ: 4.**

**Критерий:**

7	решение верно доведено до конца независимо от того выполнялась ли замена
3	все выполнено верно, но при приведении подобных в числителе получилось $2ab$ (или $1ab$ )
1	в решении выполнены все преобразования, кроме знаменателя последней дроби
0	только ответ; решение выполнялось без замены и не доведено до конца

**№ 2.** В Цветочном городе, каждый седьмой малыш – поэт, еще и механик, а каждый тринадцатый механик – еще и поэт. Кого больше в Цветочном городе механиков или поэтов?

Решение:

Пусть в городе  $m$  поэтов. Каждый седьмой поэт, еще и механик. То есть поэтов-механиков  $\frac{m}{7}$ .

Аналогично, пусть механиков  $n$ . А каждый тринадцатый механик – еще и поэт. То есть механиков-поэтов  $\frac{n}{13}$ . Но поэто-механики и механико-поэты – одни и те же люди,

поэтому

$$\frac{m}{7} = \frac{n}{13}, \text{ или } n = \frac{13}{7}m.$$

**Ответ: механиков больше.**

**Критерий:**

7	полное обоснованное решение
3-4	решение без пояснений
0	только ответ

**№3.** Даны две дроби  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$ . Причем,  $b > d > 0$  и  $c > a > 0$ . Что больше, среднее арифметическое этих дробей или дробь  $\frac{a+c}{b+d}$ .

Решение:

Рассмотрим разность

$$\frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) - \frac{a+c}{b+d} = \frac{(ad+bc)(b+d) - 2bd(a+c)}{2bd(b+d)}$$

Так как знаменатель последней дроби больше нуля, то знак определяется по знаку числителя.

$$(ad+bc)(b+d) - 2bd(a+c) = abd + bcd + b^2c + ad^2 - 2abd - 2bcd = b^2c + ad^2 - abd - bcd =$$

$$= bc(b-d) - ad(b-d) = (bc-ad)(b-d) > 0,$$

так как  $b > d > 0$  и  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , откуда  $b-d > 0$  и  $bc-ad > 0$ .

**Ответ:** дробь  $\frac{a+c}{b+d}$  меньше чем среднее арифметическое.

**Критерий:**

7	полное обоснованное решение
3-5	решение с небольшими погрешностями
0	только ответ или решение, содержащее математические ошибки

**№4.** Аня и Ваня живут на 11 этаже, 20-этажного дома, между первым и 20 этажами которого ходит лифт. Но лифт поломался, и при нажатии на любую кнопку или поднимается вверх на 9 этажей, или спускается на 5. Аня все равно решила ехать на лифте, а Ваня побежал вверх пешком. При этом на каждый следующий этаж он поднимался на 4 секунды дольше, чем на предыдущий. С 10 на 11 этаж Ваня поднимался 42 секунды. Кто раньше окажется дома и на сколько, если лифт поднимается или спускается на один этаж за 3 секунды?

Решение:

1. Найдем время, которое потратил Ваня.

От 10 до 11 этажа он дошел за 42 секунды, значит;

с 9 до 10 – 38 сек,

с 8 до 9 – 34 сек,

с 7 до 8 – 30 сек,

с 6 до 7 – 26 сек,

с 5 до 6 – 22 сек,

с 4 до 5 – 18 сек,

с 3 до 4 – 14 сек,

с 2 до 3 – 10 сек,

с 1 на 2 – 6 сек.

Всего:  $42+38+34+30+26+22+18+14+10+6 = 240$  сек.

2. Найдем время, которое потратила Аня.

Рассмотрим какую-либо последовательность движений лифта, которая приведет ее на 11 этаж

(1) - +9 - (10) -5 - (5) - +9 - (14) - -5 - (9) - +9 - (18) - -5 - (13) - -5 - (8) - +9 - (17) - -5 - (12) - -5 - (7) - -5 - (2) - +9 - (11)

(В скобках указан номер этажа, на который приехал лифт)

Заметим, что на 11 этаж может привести нас только последовательность ходов, общее число этажей в которой равно +10. Так как мы можем только проехать или на 9 этажей вверх (+9), или на 5 этажей вниз (-5), то такая последовательность обязательно содержит 5 подъемов вверх (+5x9) и 7 спусков вниз (-7x5). При этом число подъемов спусков не зависит от их последовательности (является инвариантом). То есть  $5 \times 9 - 7 \times 5 = 10$ .

При этом, Аня проедет  $45 + 35 = 80$  этажей (вверх и вниз). Всего она потратила на это  $80 \times 3 = 240$  секунд.

Аня потратила 240 секунд и Ваня поднимался 240 секунд.

**Ответ: одновременно.**

**Критерий:**

7	полное решение
5	найдено время и Ани и Вани, дан верный ответ без обоснования единственности полученного результата для Ани
2	посчитано время только Вани (или только Ани)
0	только ответ, без решения, или логические описки в решении, приведшие к неверному ответу

**№5.** Из вершины В треугольника ABC опущены перпендикуляры BL и BK на биссектрисы внешних углов A и C соответственно. Доказать, что прямая LK параллельна стороне AC треугольника ABC.

Доказательство

Продлим перпендикуляры BL и BK до пересечения с продолжением стороны AB. Соответствующие точки назовем A1 и B1. Рассмотрим треугольник A1AB. Он равнобедренный. Действительно, угол  $A1AL = BAL$  по построению,  $A1LA = BLA = 90$ , AL – общая, то треугольники A1AL и BAL равны. Следовательно A1AB – равнобедренный. Аналогично, C1CB – равнобедренный. Тогда,  $A1L = LB$ ,  $C1K = KB$ . Отсюда, KL – средняя линия треугольника A1BC1. Следовательно, KL параллельна A1C1 и AC.

**Критерий:**

7	полное доказательство
5	доказательство в целом верное, с неточностями
0	нет доказательства или в доказательстве пропущены важные моменты (доказательство равнобедренности A1AB и C1CB)