8-й класс

8.1 Какую градусную меру может иметь средний по величине угол треугольника?

Ответ: любую от 0° до 90°

Решение. Пусть α, β, γ – углы треугольника, $\alpha \le \beta \le \gamma$. Разумеется, $\beta > 0^{\circ}$. Оценим β сверху: $2\beta \le \beta + \gamma < \alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$, $\beta < 90^{\circ}$. Далее следует объяснить (привести пример), почему для любого β, $0^{\circ} < \beta < 90^{\circ}$, существует треугольник, средний по (величине) угол которого равен β. Рассмотрим угол $\alpha = \min\{\beta, 90^{\circ} - \beta\}$. Имеем: $\alpha > 0^{\circ}$, $\alpha \le \beta$ и $\alpha + \beta \le 90^{\circ} - \beta + \beta = 90^{\circ}$. Тогда $\gamma = 180^{\circ} - (\alpha + \beta) \ge 180^{\circ} - 90^{\circ} = 90^{\circ} > \beta$. Треугольник с углами α, β, γ дает нам подходящий пример.

8.2 Три числа x,y,z удовлетворяют соотношению $x^2 + y^2 = xy\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Докажите, что хотя бы одно из чисел x или y равно произведению двух других чисел.

Решение. По условию

$$x^2 - xyz + y^2 - \frac{xy}{z} = 0,$$

$$x(x - yz) - y\left(\frac{x}{z} - y\right) = 0,$$

$$x(x - yz) - \frac{y}{z}(x - yz) = 0,$$

$$(x - yz)\left(x - \frac{y}{z}\right) = 0.$$

Поэтому обязательно либо $x - yz = 0$, либо $x - \frac{y}{z} = 0$, т.е. $y - xz = 0$.

8.3 Имеется 11 различных натуральных чисел, не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

Решение. Рассмотрим у каждого числа его наибольший нечетный делитель. Среди таких делителей обязательно найдутся два одинаковых (так как имеется всего 10 нечетных чисел, не больших 20). Из соответствующих двух чисел одно – большее – делится на другое – меньшее.

8.4 Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяет соотношениям $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}$ при $n = 4,5,6,\ldots$ Найдите a_{2019} если известно, что $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$.

Решение. Ясно, что все члены этой последовательности равны ± 1. Находим:

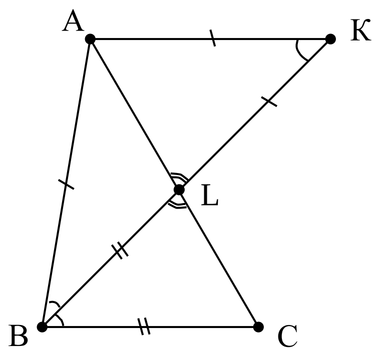
$$a_n = (a_{n-1}) \cdot a_{n-3} = (a_{n-2} \cdot a_{n-4}) \cdot a_{n-3} = (a_{n-2}) \cdot a_{n-4} \cdot a_{n-3} =$$
$$= (a_{n-3} \cdot a_{n-4}) \cdot a_{n-4} \cdot a_{n-3} = a_{n-3}^2 \cdot a_{n-4} \cdot a_{n-5} = a_{n-4} \cdot a_{n-5} =$$
$$= (a_{n-4}) \cdot a_{n-5} = (a_{n-5} \cdot a_{n-7}) \cdot a_{n-5} = a_{n-5}^2 \cdot a_{n-7} = a_{n-7}$$

Т.е. последовательность периодична с периодом 7. Поэтому

$$a_{2019} = a_{288\cdot 7+3} = a_3 = -1.$$

8.5 В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, и на ее продолжении за точку L выбрана точка K, для которой $LK = AB$. Оказалось, что прямая AK параллельна прямой BC. Докажите, что $AB > BC$.

Решение. См. рис.



Угол AKB равен KBC (так как $AK \parallel BC$, BK – секущая). Поэтому треугольник BAK – равнобедренный. Значит, $AK = AB$. Но тогда в треугольнике LKA равны две стороны $AK = KL \ (= AB)$. Треугольник LBC подобен треугольнику LKA, следовательно, он равнобедренный и $BL = BC$. Теперь получаем $AB + AK > BK = BL + LK$, т.е. $AB + AB > BC + AB$, откуда $AB > BC$, ч.т.д.