

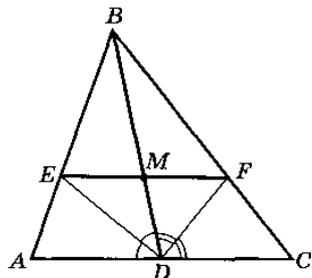
Ответы и решения. 8 класс.

Решение.

1. Если сумма трех целых чисел равна 9999, то либо они все нечетны (и тогда их произведение оканчивается на нечетную цифру), либо два из них четны, а одно нечетно (тогда их произведение делится на 4, а число, оканчивающееся на 02, на 4 не делится).

2. По свойству биссектрисы для треугольников ABD и CBD можно записать:

$$BE : EA = BD : DA = BD : DC = BF : FC$$



Значит, по обратной теореме Фалеса $EF \parallel AC$, откуда $EM : MF = AD : DC = 1 : 1$, то есть DM – медиана треугольника EDF .

$$\text{Но } \angle EDF = \angle EDB + \angle FDB = \frac{1}{2} \angle ADB + \frac{1}{2} \angle CDB = \frac{1}{2} (\angle ADB + \angle CDB) = 90^\circ.$$

Таким образом, $DM = \frac{1}{2} EF$ по свойству медианы прямоугольного треугольника.

3. Ответ: 13, 13 и 22 года.

Решение.

Из условия получаем $\overline{aa} + 2\overline{bc} = \overline{d(2d)}$, откуда следует, что a – четная цифра, т.е. $a = 2$ (теоретически возможно и $a \geq 4$, но тогда $d \geq 6$ и $2d$ уже не является цифрой). Значит, $d = 3$ или 4 . Первое невозможно, так как тогда возраст каждого из близнецов $-\frac{1}{2}(36 - 22) = 7$ лет, и они не могли участвовать в олимпиаде, во втором случае их возраст $\frac{1}{2}(48 - 22) = 13$ лет.

4. Ответ. 9 учеников.

Решение.

Пусть X количество учеников, Y – средний возраст учеников, тогда получим уравнение:

$$\frac{xy + y + 40}{x + 1} + 36 = y + 40$$

$$x = 9$$

5. Ответ: три числа.

Решение.

Разобьем числа на пары: a и $c^2 - a$, b и $a^2 - b$, c и $b^2 - c$. В каждой паре сумма чисел положительна, поэтому в каждой паре не более одного отрицательного числа. Значит, всего отрицательных чисел не более трех. Три числа из шести могли оказаться отрицательными, например числа a, b, c .