8 класс

1. Каждый полуврун поочередно через день врёт и говорит правду (если сегодня врёт, то завтра говорит правду и наоборот). Ровно неделю назад один полуврун высказал два утверждения: «Вчера была среда»; «Завтра будет четверг». Сегодня он высказал два других утверждения: «Вчера была пятница» и «Завтра будет выходной». Можно ли определить какой сегодня день недели? Ответ подробно обоснуйте.

   Решение. Утверждения «Вчера была среда» и «Завтра будет четверг» не могут быть верными одновременно, значит, неделю назад полуврун лгал. Так как в неделе нечетное количество дней, то сегодня он говорит правду. Значит, вчера была пятница, тогда сегодня суббота. **Ответ: можно, суббота.**

2. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 12 различных натуральных делителей, наибольший простой делитель которого есть число 101, а последняя цифра – нуль.

   Решение. Пусть n – искомое число. По условию $n \vdots 101$, $n \vdots 2$, $n \vdots 5$. Рассмотрим число $m = 2 \cdot 5 \cdot 101$, заметим, что оно имеет ровно 8 различных натуральных делителей (1, 2, 5, 101, $2 \cdot 5$, $\ldots$, $2 \cdot 5 \cdot 101$), значит, $n > m$. Поскольку n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию задачи, то далее рассмотрим число $2 \cdot m = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, полученное из m умножением на наименьшее из простых чисел. Заметим, что число $2m = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ имеет ровно 12 различных натуральных делителей (1, 2, 4, 5, 101, $2 \cdot 5$, $\ldots$, $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$), а значит, $n = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 = 2020$. **Ответ: 2020.**

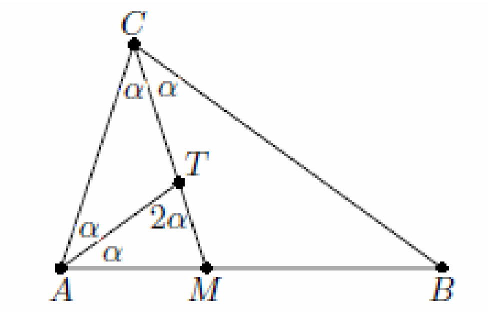
   Комментарий. В решении может использоваться известная функция $\tau(n)$ – количество натуральных делителей числа n. Причем, если каноническое разложение на простые множители числа n имеет вид $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$. Если участник олимпиады использует последнюю формулу без доказательства, то баллы не снимаются.

3. Сколько существует четырёхзначных чисел, у которых цифра тысяч больше цифры сотен?

   Решение. Цифра в разряде тысяч может принимать одно из 9 возможных значений: 1, 2, 3, ..., 9 (нельзя брать 0, поскольку число четырёхзначное). Для каждого из этих вариантов можно указать соответствующее число вариантов для цифры сотен: 1, 2, 3, ..., 9. То есть, всего $1+2+\ldots+9 = 45$ вариантов. Остальные две цифры произвольные (по 10 вариантов), поэтому получаем ответ: $45 \cdot 10 \cdot 10 = 4500$ вариантов. **Ответ: 4500.**

4. В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке M, а биссектриса угла A пересекает отрезок CM в точке T. Оказалось, что отрезки CM и AT разбили треугольник ABC на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

   Решение. Так как сумма углов A и C треугольника ABC меньше, чем $180°$, то $\angle TAC + \angle TCA < 90°$, поэтому угол ATC – тупой (см. рисунок).



Значит, в равнобедренном треугольнике ATC сторона AC является основанием. Тогда $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$, поэтому $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$. Угол ATM – внешний для треугольника ATC, следовательно, $\angle ATM = 2\alpha$.

Треугольник ATM также является равнобедренным. Если T – его вершина, то $\angle TMA = \angle TAM = \alpha$, тогда сумма углов этого треугольника равна 4α. Но 4α – сумма углов A и C исходного треугольника, то есть меньше $180°$. Значит, TM – основание треугольника ATM, а сумма его углов равна 5α. Отсюда $\alpha = 36°$.

Треугольник CMB также оказывается равнобедренным, так как $\angle MCB = \angle MBC = 36°$. **Ответ:** $36°$**,** $72°$**,** $72°$**.**

5. Какое минимальное число фишек нужно взять, чтобы при любой их расстановке на клетках шахматной доски обязательно встретились бы 4 фишки, стоящие друг за другом по горизонтали?

   Решение. Рассмотрим одну горизонталь. Чтобы в ней обязательно встретились 4 фишки, в ней должно быть не меньше 7 фишек (6 фишек можно расставить в две группы по 3 фишки). Если всего будет $6 \cdot 8 + 1 = 49$ фишек, то по принципу Дирихле обязательно найдётся горизонталь, в которой будет не менее 7 фишек. С другой стороны, меньшим числом фишек обойтись нельзя: 48 фишек можно разместить по 6 в каждом ряду так, что условие не будет выполнено. **Ответ: 49.**
   Комментарий. Только правильный ответ – 1 балл. Показано, что 49 фишек всегда достаточно – не менее 4 баллов.