Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2019 года. Решения задач

8 класс

8-1. Начинающий цветовод высадил на свою грядку ромашки, лютики и маргаритки. Когда они взошли, оказалось, что ромашек в 5 раз больше, чем не-ромашек, а лютиков – в 5 раз меньше, чем не-лютиков. Какую долю среди проросших растений занимают маргаритки?

Ответ. Нулевую. Они не взошли.

Решение. Ромашки составляют 5/6 от всех цветов, а лютики – 1/6. Значит, их общее количество равно количеству всех цветов.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

8-2. Коля старше Толи, и возраст каждого из них — целое число, меньшее 100. Если поменять местами цифры возраста Коли, получится возраст Толи. Более того, разность между квадратами их возрастов является квадратом целого числа. Сколько лет каждому?

Ответ: Николаю — 65 лет, Анатолию — 56 лет.

Решение. Пусть возраст Коли равен $\overline{ab} = 10a + b$, где a и b — цифры от 0 до 9. Тогда возраст Толи $\overline{ba} = 10b + a$, и $a > b$. Имеем $(10a + b)^2 - (10b + a)^2 = 9 \cdot 11(a + b)(a - b)$. Эта разность является квадратом целого числа, поэтому $a + b$ или $a - b$ должны делиться на 11. Поскольку a и b — цифры, очевидно, возможно только равенство $a + b = 11$. Значит, $a - b = 11 - 2b$ — квадрат целого числа. Несложный перебор приводит только к одному варианту: $a = 6$, $b = 5$. Таким образом, возраст Николая — 65 лет, а Анатолия — 56 лет.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Показано, что разность квадратов имеет вид $9 \cdot 11(a + b)(a - b)$ – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

8-3. Вика записывает свои оценки с начала года. В начале второй четверти она получила пятерку, после чего доля пятерок увеличилась на 0,15. После очередной оценки доля пятерок увеличилась еще на 0,1. Сколько пятерок ей нужно теперь получить, чтобы увеличить их долю еще на 0,2?

Ответ. 4.

Решение. Пусть в первой четверти у Вики было n оценок, из которых k пятерок. Тогда после первой пятерки второй четверти их доля увеличилась на $\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} = 0{,}15$. Аналогично после второй пятерки прирост составил $\frac{k+2}{n+2} - \frac{k+1}{n+1} = 0{,}1$. Упрощая каждое уравнение, получаем систему

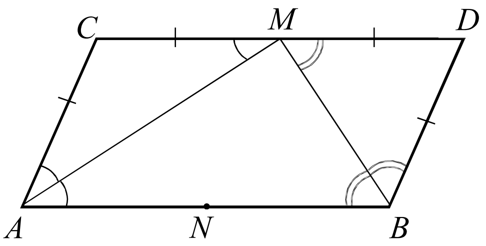
$$\begin{cases} n - k = 0{,}15n(n+1) \\ n - k = 0{,}1(n+1)(n+2) \end{cases}$$

В частности, $0{,}15n(n + 1) = 0{,}1(n + 1)(n + 2)$, то есть $1{,}5n = n + 2$, $n = 4$. Подставляя это значение в первое уравнение найдем, что $k = 4 - 0{,}15 \cdot 4 \cdot 5 = 1$. Значит, после двух полученных во второй четверти пятерок их доля составила 3/6 = 0, 5. Вика хочет, чтобы после получения ещё m пятерок их доля стала равной 0,5 + 0,2 = 0,7, то есть $\frac{3+m}{6+m} = 0{,}7$. Решая это уравнение, получаем, что $m = 4$.

Критерии. Ответ без обоснования – 0 баллов. Составленная система уравнений – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

8-4. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, лежащей на стороне CD. Обозначим точку пересечения биссектрис углов C и D через N. Докажите, что MN параллельно AD.

Решение. В силу параллельности AB и CD угол $\angle CMA = \angle MAB = \angle MAC$, с силу чего треугольник ACM – равнобедренный и $AC = CM$. Аналогично показывается, что $MD = BD$, что совпадает с AC. Итак, M – середина CD. Аналогично можно показать, что биссектрисы углов C и D пересекают сторону AB в ее середине. Значит, эта середина и есть точка N, откуда и следует, что $MN \parallel AC$.



Критерии. Если выяснен факт $AC = CM$ – 2 балла. Если факт, что N – середина AB, упоминается, но не доказан—не более 4 баллов. Полное решение – 7 баллов.

8-5. Трудолюбивая Ася перемножила два трехзначных числа, а ленивый Петя просто написал их подряд одно за другим. Результат Пети оказался в 7 раз больше, чем у Аси. Какие числа она перемножала?

Ответ. 143 и 143

Решение. Обозначим исходные числа через a и b. Результат Аси – ab, Пети – $1000a + b$, они связаны соотношением $1000a + b = 7ab$, откуда $b = \frac{1000a}{7a-1}$. Заметим, что числа a и $7a - 1$ не имеют общих делителей, так что $7a - 1 = p$ – делитель 1000. В силу того, что $a \geq 100$ имеем $p \geq 699$, но тогда $p = 1000$, $a = 1001/7 = 143$, $b = a$.

Критерии. Только ответ 0 баллов, правильно составлено уравнение – 3 балла. Выведен правильный ответ, но не доказано, что других нет – 5 баллов.