

Ответы и решения. 9 класс.

1. Ответ. Можно

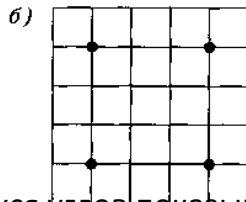
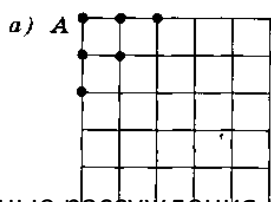
Если слева вычеркнуть 4, а справа 11, 13, 17, 19 и 16, то оба оставшихся выражения будут равны $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Замечание. Приведенный пример не единственный, например, можно слева вычеркнуть 3 вместо 4, а справа - 12 вместо 16.

2. Из равенства $a^2 + b^2 = c^2$ следует, $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = c^4$, поэтому доказываемое неравенство принимает вид $4(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 3(a^4 + a^2b^2 + b^4) \Leftrightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 \geq 0$.

3. Ответ: 4 полицейских.

Решение. Рассмотрим угловой перекресток А. До него полицейский может добраться, если он находится на одном из 6 перекрестков, примыкающих к этому углу.

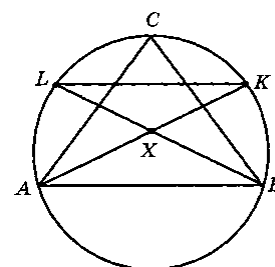


Аналогичные рассуждения для трёх оставшихся углов показывают, что для выполнения условия задачи необходимо наличие, по крайней мере, четырёх полицейских. Осталось только привести пример расстановки четырёх полицейских (рис. б).

4. Решение

Из условия следует подобие треугольников AXB и KXL – по первому признаку подобия треугольников (отрезки AK и BL делятся точкой пересечения в равных отношениях и $\angle AXB = \angle KXL$).

Отсюда $\angle BAK = \angle LKA$, но $\angle LKA = \angle ABL$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AL). Так как AK и BL – биссектрисы углов A и B, половины которых равны, то отсюда $\angle A = \angle B$, то есть $\triangle ABC$ – равнобедренный.



5. Решение.

Из условия следует, что в одной из соседних клеток с любым лжецом должен стоять рыцарь, а все соседи рыцаря должны быть лжецами.

Рассмотрим разбиение доски на 9 непересекающихся областей и отметим в каждой области по одной клетке, как это показано на рисунке.

Заметим, что либо в отмеченной клетке стоит рыцарь, либо

(если в ней стоит лжец) хотя бы в одной соседней с ней клетке стоит рыцарь. Следовательно, в каждой из областей есть хотя бы один рыцарь. Поэтому рыцарей должно быть не меньше 9. Если же рыцари будут стоять в отмеченных клетках, а в остальных будут стоять лжецы, то условие задачи будет выполнено.

