

Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
Муниципальный этап  
2019-2020 уч.год  
11 класс

1. Какова наибольшая длина арифметической прогрессии из натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  с разностью 2, в которой при всех  $k = 1, 2, \dots, n$  все числа  $a_k^2 + 1$  являются простыми?
2. Даны 2019 многочленов 2018-й степени, никакие два из которых не имеют общих корней. Известно, что каждый из этих многочленов имеет общий корень с суммой 2018 остальных. Докажите, что сумма этих 2019 многочленов равна нулю.
3. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник, так, что все его вершины находятся в вершинах клеток, и ни одна из его сторон не идет по горизонтали или вертикали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключенных внутри многоугольника, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки, заключенных внутри многоугольника.
4. Четырехугольник  $ABCD$  описан вокруг окружности  $\omega$ .  $P, Q, R, S$  – точки касания этой окружности со сторонами  $AB, BC, CD, DA$  соответственно. В треугольники  $APS, BPQ, CQR, DRS$  вписаны окружности. Центры этих окружностей обозначены  $X, Y, Z, V$  соответственно. Докажите, что диагонали четырехугольника  $XYZV$  взаимно перпендикулярны.
5. Каждый зритель спектакля, купивший билет в первый ряд, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своем месте. Билетер может поменять местами двух соседей, если оба сидят не на своих местах. Сможет ли он рассадить всех зрителей первого ряда на свои места при любой указанной первоначальной рассадке?