

**Муниципальный этап  
всероссийской олимпиады школьников  
по математике  
2019/20 учебный год  
11 класс**

*Дорогой друг! Желаем успеха!*

**Инструкция для учащихся**

Олимпиада по математике состоит из 6 заданий. На выполнение олимпиады отводится 4 астрономических часа. Каждое задание оценивается в 7 баллов, решение задания необходимо расписать подробно. Задания можно выполнять по своему усмотрению. Если задание не удастся выполнить сразу, перейдите к следующему. Если останется время, вернитесь к пропущенным заданиям.

**Калькулятором, справочной литературой пользоваться нельзя!**

**Задания (максимальный балл за всю работу – 42)**

1. Рассматриваются квадратные трёхчлены вида  $x^2 + px + q$  с целыми коэффициентами, при этом  $p + q = 30$ . Сколько таких трёхчленов имеют целые корни?
2. Найдите какую-нибудь функцию  $f(x)$ , для которой уравнения  $f(x) = 0$  и  $f'(x) + x^2 + 1 = 0$  имеют одно и то же непустое множество корней.
3. В какое наименьшее количество цветов нужно раскрасить натуральные числа так, чтобы любые два числа, разность между которыми равна 3, 4 или 6, были разного цвета?
4. На листе нарисованы координатные оси и ветви гиперболы  $y = k/x$  ( $k$  неизвестно, масштаб по координатным осям также не указан). На одной из ветвей отмечена точка. С помощью циркуля и линейки постройте касательную к гиперболе в отмеченной точке.
5. В единичный квадрат бросили 51 точку. Доказать, что некоторые три из них обязательно лежат внутри круга радиуса  $1/7$ .
6. Существуют ли натуральные  $a$  и  $b$ , большие 1000 и такие, что для любого  $c$ , являющегося точным квадратом, три числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не являются длинами сторон треугольника?