

8 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

¹ Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

8.1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b число $4a^2 + 4ab + 4a + 2b + 1$ является составным.

8.2. Пятеро друзей сыграли друг с другом по несколько партий (не обязательно одинаковое количество) в настольный теннис (ничьих не бывает). После игр первый заметил, что у него побед на 4 больше, чем поражений; второй и третий заметили, что у каждого из них поражений на 5 больше, чем побед. Четвертый заметил, что у него побед столько же, сколько поражений, а пятый, что он с каждым из остальных сыграл поровну партий. Мог ли пятый выиграть во всех партиях?

8.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL . На стороне AC взята точка P так, что LA – биссектриса угла BLP . Докажите, что если $BL = CP$, то угол ABC в два раза больше угла BCA .

8.4. В турнире по шахматам каждый из 10 игроков сыграл с каждым по одной партии, и Петя занял последнее место (набрал меньше очков, чем любой другой участник). Потом двоих игроков дисквалифицировали, и все очки, набранные во встречах с ними, аннулировали, и этих двух игроков исключили из таблицы. Оказалось, что в результате Петя стал победителем турнира (набрал больше очков, чем любой другой участник). Сколько очков в итоге (после дисквалификации игроков) мог набрать Петя? За победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0 очков.

8.5. Даны положительные числа a, b, c, d . Известно, что любые два из них отличаются не более чем в 3 раза. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$.

