Условия и решения задач
(районная математическая олимпиада 2020 г.)

10 класс

1. Даны числа *a, b, c*. Известно, что для любого *x* выполнено неравенство $ax^2 + bx + c > bx^2 + cx + a > cx^2 + ax + b$. Докажите, что $a = b = c$.

Доказательство. Из неравенства получаем, что трехчлены $(ax^2+bx+c) - (bx^2+cx+a)$ и $(bx^2+cx+a) - (cx^2 + ax + b)$ принимают неотрицательные значения при всех значениях x; отсюда следует, что их старшие коэффициенты $a - b$ и $b - c$ неотрицательны, т. е. $a > b > c$. С другой стороны, подставив в исходные неравенства $x = 0$, получаем $c > a > b$, откуда $a > b > c > a$, что возможно лишь в случае равенства всех трех коэффициентов.

2. Сумма номеров домов на одной стороне квартала равна 2021. Какой номер имеет седьмой дом от угла?

Решение: Пусть первый от угла дом квартала имеет номер p, а количество домов на одной стороне квартала равно k. Тогда, последовательность p, $p + 2$, $p + 4$, ..., $p + 2(k - 1)$ номеров этих домов является арифметической прогрессией. Сумма первых k членов этой прогрессии равна $(p + p +2k - 2)\cdot k/2 = (p + k - 1)k$. По условию получим уравнение: $(p + k - 1)k = 2021$. Разложение на простые множители числа 2021 имеет вид $2021 = 43\cdot 47$. Так как $p \geq 1$, то $p + k - 1 \geq k$, значит, $p + k - 1 = 47$, а $k = 43$, то есть $p = 5$. Следовательно, на одной стороне квартала 43 дома, а их нумерация начинается с числа 5. Таким образом, седьмой дом имеет номер 17.

Ответ: 17.

3. Некто выписал подряд два числа 5^{2020} и 2^{2020}. Сколько цифр будет содержать получившееся число?

Решение. Пусть число 2^{2020} содержит *m* цифр, а число 5^{2020} содержит *n* цифр. Тогда справедливы неравенства: $10^{m-1} < 2^{2020} < 10^m$, $10^{n-1} < 5^{2020} < 10^n$ (неравенства строгие, поскольку степень двойки или пятерки не равна степени десятки). Перемножая эти неравенства, получаем $10^{m+n-2} < 10^{2020} < 10^{m+n}$. Отсюда следует, что показатель 2020 заключен между m+n-2 и m+n, поэтому $2020 = m+n-1$ и $m + n = 2021$. Это означает, что всего выписано 2021 цифра.

Ответ: 2021.

4. Можно ли найти два таких натуральных числа *x* и *y*, что сумма этих чисел на 2021, меньше суммы их НОД и НОК?

Решение: Другими словами нам нужно выяснить, имеет ли уравнение НОД(x,y) + НОК(x,y) – (x + y) = 2021 решение на множестве натуральных чисел. Запишем это уравнение в виде НОД(x,y) + НОК(x,y) + x + y = 2021. Проанализируем полученное уравнение с точки зрения чѐтности. Если оба числа x и y чѐтные, то их НОД и НОК также чѐтные, и сумма четырѐх слагаемых (чѐтных чисел) тоже должна быть чѐтной. Если они оба нечѐтные, то их НОД и НОК нечѐтные, а сумма четырех нечѐтных – чѐтная. Наконец, если одно из чисел x, y чѐтное, а второе нет, то НОД нечѐтен, а НОК – чѐтное, сумма также чѐтная. Таким образом, нужных чисел и не существует.

Ответ: Не существуют.

5. Найдите сумму:

$$\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{2}{2008\cdot2009\cdot2010}$$

Решение:

Заметим, что $\frac{2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$.

Отсюда следует, что требуемая сумма равна:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}$$

Легко видеть, что все слагаемые, кроме первых двух и последних двух сокращаются, таким образом получаем:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}=\frac{1009522}{2019045}$$

Ответ: 1009522/2019045.