МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 10 КЛАСС

Максимальное число баллов за одну задачу — 7, максимальное общее число баллов — 35

Продолжительность — 4 часа.

В каждой задаче требуется предъявить развернутое решение.

10.1. Каждую секунду компьютер выводит на экран число, равное сумме цифр предыдущего, умноженной на 31. На первой секунде было выведено число 2020. Какое число будет выведено на экран на 2020-й секунде?

Ответ: 310.

Решение: Вычислим несколько первых чисел, выводимых на экран.

На первой секунде выведено число $a_1 = 2020$, тогда

на второй секунде выведено число $a_2 = (2+0+2+0)\cdot31 = 4\cdot31 = 124$;

на третье секунде – число $a_3 = (1+2+4)\cdot31 = 7\cdot31 = 217$;

на 4й секунде – число $a_4 = (2+1+7)\cdot31 = 310$;

на 5й секунде – число $a_5 = (3+1+0)\cdot31 = 4\cdot31 = 124 = a_2$.

Так как при вычислении каждого следующего числа используется только предыдущее число, то далее числа, выводимые на экран, будут повторяться с периодом 3. Число секунд (2020 – 1) делится на 3 нацело, значит, на 2020й секунде будет выведено число 310.

Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное обоснование;

5-6 баллов – верный ответ и верные, в целом, рассуждения, в которых есть незначительные пробелы или неточности;

4 балла – приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка;

только ответ – 0 баллов.

10.2. На доске выписаны два целых числа, сумма которых равна N. Таня, верно поняв задание учителя, правильно умножила левое число на целое число A, а правое – на целое число B, и обнаружила, что сумма полученных произведений делится на N. Вася же всё перепутал и умножил левое число на B, а правое – на A, но утверждает, что сумма полученных им произведений также делится на N. Не ошибается ли Вася?

Ответ: нет, не ошибается.

Решение: Пусть X – левое число, а Y – правое. Тогда Таня получила сумму $(AX + BY) \vdots N$, а Вася – сумму $(BX + AY)$.

Сумма полученных Таней и Васей чисел равна $(AX + BY) + (BX + AY) = (A + B)(X + Y) = N(X + Y)$, то есть делится на N. Так как одно из двух слагаемых (число Тани) делится на N, то и другое (число Васи) делится на N. Значит, не ошибается.

Критерии:

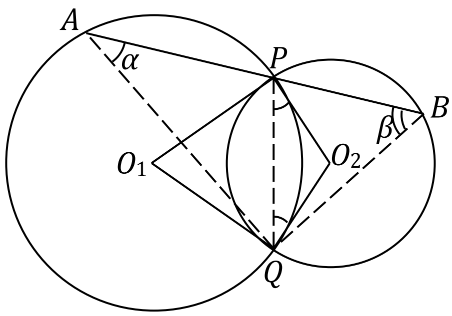
7 баллов – приведено полное обоснованное решение;

5-6 баллов – приведено в целом верное рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности;

если рассмотрены только частные случаи или конкретные примеры – 0 баллов.

10.3. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q, причем O_1P и O_1Q являются касательными к окружности ω_2. Прямая, проведенная через точку P вторично пересекает окружности в точках A и B. Докажите, что AQ и BQ перпендикулярны.

Решение:



Пусть $\angle QAB = \alpha$, а $\angle QBA = \beta$.

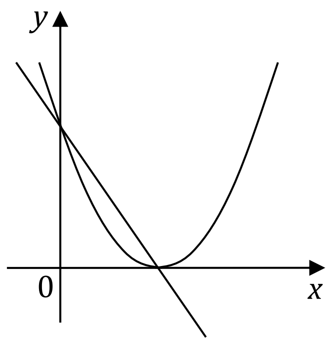
Заметим, что $\angle O_2PQ = \angle O_2QP = \alpha$ (по теореме об угле между касательной и хордой), $\angle PO_2Q = 2\beta$ (центральный угол). Из треугольникаPO_2Q: $2\alpha + 2\beta = 180^0$, значит, $\alpha + \beta = 90^0$. Следовательно, $\angle AQB = 180^0 - \alpha - \beta = 90^0$. Что и требовалось.

Критерии:

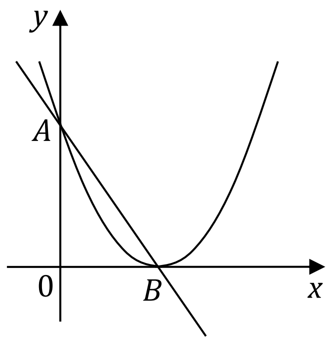
7 баллов – полное верное доказательство;

3-5 баллов – частично верное доказательство.

10.4. На координатной плоскости построены графики линейной и квадратичной функции, как показано на рисунке (одна из точек пересечения находится в вершине параболы), причем прямая $y = kx + b$ проходит через точку (–1; 2020), а коэффициенты a и c параболы $y = a(x - c)^2$ – целые числа. Сколько различных значений может принимать коэффициент k? Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.



Ответ: два. $k = -404; -1010$.



Решение: Заметим, что $k< 0$. Так как прямая проходит через точку (–1; 2020), то $2020 = -k + b$, откуда $b = 2020 + k$. Тогда уравнение прямой записывается в виде $y = kx + 2020 + k$.

Найдем точки пересечения прямой с осями координат.

т. A: $y_A = k\cdot 0 + 2020 + k = 2020 + k$. Тогда$A = (0; 2020 + k)$.

т. B: $0 = k\cdot x_B + 2020 + k$, $x_B = -\frac{2020+k}{k}$. Тогда $B = \left(-\frac{2020+k}{k}; 0\right)$.

Так как т. B – вершина параболы, то $c = -\frac{2020+k}{k} = -1 - \frac{2020}{k}$. Тогда парабола описывается уравнением $y = a\left(x + 1 + \frac{2020}{k}\right)^2$.

Так как парабола также проходит через точку A, то

$2020 + k = a\left(\frac{2020+k}{k}\right)^2$, откуда $a = \frac{k^2}{2020+k}$. Тогда, окончательно, уравнение параболы $y = \frac{k^2}{2020+k}\cdot\left(x + 1 + \frac{2020}{k}\right)^2$.

В силу того, что коэффициентc – целый, k должен быть делителем числа 2020. С учетом $k<0$,возможны варианты $k = -1, -2, -4, -5, -10, -20, -101, -202, -404, -505, -1010, -2020$.

Коэффициент a – также целое число, а значит, k^2 должно делиться на $2020 + k$, т.е. $k^2 \geq 2020 + k$, откуда $k<-44$, причём $k \neq 2020$, т.е. остается проверить –101, –202, –404, –505, –1010.

101^2 не кратно $1919 = 19\cdot 101$.

$202^2 = 4\cdot 101^2$ не кратно $1818 = 2\cdot 9\cdot 101$.

$404^2 = 16\cdot 101^2$кратно $1616 = 16\cdot 101$.

$505^2 = 5^2\cdot 101^2$ не кратно $1515 = 3\cdot 5\cdot 101$.

1010^2 кратно 1010.

Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное верное решение;

найдено выражение b через k – 1 балл;

найдено выражение c через k – 2 балла;

найдено выражение a через k – 2 балла;

последние три критерия могут суммироваться;

только ответ – 0 баллов.

10.5. В математическом классе учится 24 ученика. Один из них стал недавно победителем математической олимпиады. Каждый из его одноклассников имеет с ним ровно пять общих друзей. Докажите, что в классе есть ученик с нечетным числом друзей.

Решение

Пусть это не так и каждый ученик в классе имеет четное число друзей. Разобьем класс на три группы. В первой группе будет только победитель, во второй группе – его друзья (их четное число), в третьей группе – все остальные (их останется нечетное число).

Каждый школьник из третьей группы имеет четное число друзей, причем пятеро из них – во второй группе, значит оставшиеся друзья (их нечетное количество) – все в третьей группе.

Таким образом, каждый школьник из третьей группы имеет нечетное количество друзей внутри группы, в которой нечетное количество участников. Докажем, что этого не может быть.

Пусть все друзья поздороваются друг с другом за руку. Очевидно, в сумме будет протянуто нечетное количество рук. Но при этом все руки при рукопожатии разобьются на пары, а это невозможно.

Критерии

Полное верное доказательство -- 7 баллов

Тем или иным верным способом сводится к лемме о рукопожатиях, доказательства леммы нет – 4 балла.

Неверная попытка свести к лемме о рукопожатиях, доказательство леммы приводится – не более 3 баллов.