

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2020– 2021 учебный год
Математика
10 класс

Требования к проверке работ:

1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;

2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

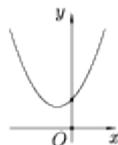
В комментариях к отдельным задачам, в приведенных ответах и решениях к задачам олимпиады, указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Ответы и решения

10.1. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ не имеет корней и $a + b + c > 0$. Найдите знак коэффициента c .

Ответ: $c > 0$.

Решение. Трёхчлен не имеет корней, значит, его график не пересекает ось x . Так как $y(1) = a + b + c > 0$, то график располагается в верхней полуплоскости (см. рис.), следовательно, $c = y(0) > 0$.



10.2. Петя сбегает с четвертого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем мама едет на лифте. Мама едет на лифте с четвертого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем Петя сбегает с пятого этажа на первый. За сколько секунд Петя сбегает с четвертого этажа на первый? (Длины пролетов лестницы между всеми этажами одинаковы).

Ответ. За 12 секунд.

Решение. Между первым и четвертым этажами 3 пролета, а между пятым и первым – 4. Согласно условию, Петя 4 пролета пробегает на 2 секунды дольше, чем мама едет на лифте, а три пролета – на 2 секунды быстрее мамы. Значит, за 4 секунды Петя пробегает

один пролет. Тогда с четвертого этажа на первый (т.е. 3 пролета) Петя сбегает за $4 \times 3 = 12$ секунд.

Критерии проверки.

7 баллов. Верный ответ с полным решением.

5 баллов. Объяснено, что на один пролет требуется 4 секунды, в ответе указано 4 секунды.

3 балла. Верное обоснование в предположении, что путь с пятого этажа на первый в 1,25 раз больше пути с четвертого этажа на первый и ответ 16 секунд.

Только ответ – **0 баллов.**

10.3. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 10 партий, второй – 21. Сколько партий сыграл третий игрок?

Ответ. 11 партий.

Решение. По условию второй игрок сыграл 21 партию, поэтому всего было сыграно не менее 21 партии. Из каждой двух партий подряд первый игрок хотя бы в одной должен участвовать, значит, партий было не более $2 \cdot 10 + 1 = 21$. Следовательно, была сыграна всего 21 партия, и второй игрок участвовал в каждой из них. В 10 партиях он встречался с первым, а в оставшихся 11 партиях – с третьим.

10.4. Пусть x - некоторое натуральное число. Среди утверждений:

$2x$ больше 70;

x меньше 100;

$3x$ больше 25;

x не меньше 10;

x больше 5;

три верных и два неверных. Чему равно x ?

Ответ. 9.

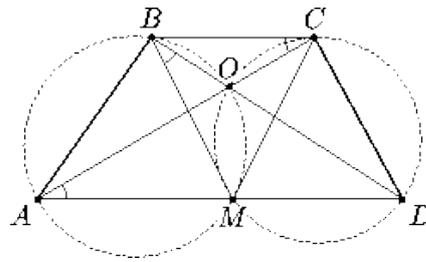
Решение

Первое утверждение эквивалентно тому, что $x > 35$, а третье утверждение эквивалентно тому, что $x > 8$, поскольку x - натуральное число. Первое утверждение неверно, так как если бы оно было верно, то были бы верны также третье, четвертое и пятое утверждения, т.е. бы хотя бы 4 верных утверждения. Поэтому x не превосходит 35. Отсюда следует, что второе утверждение верно. Но тогда неверно четвертое утверждение (иначе были бы верны третье и пятое утверждения, и снова мы получили бы по крайней мере 4 верных утверждения). Отсюда вывод: утверждения 3 и 5 - верные. А из неверности четвертого утверждения и верности третьего утверждения сразу следует, что $x=9$.

10.5. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD . Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

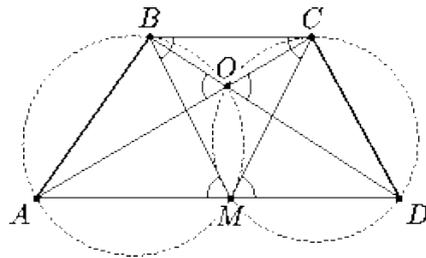
Решение

Первый способ. По теореме об углах, вписанных в окружность, $\angle OBM = \angle OAM$ (см. рис.). По определению трапеции $\angle OAM = \angle OCB$. Таким образом, $\angle OBM = \angle OCB$. Аналогично доказывается, что $\angle OCM = \angle OBC$. Складывая полученные равенства, найдём, что $\angle MBC = \angle MCB$, то есть, $BM = CM$.



Второй способ.

Рассмотрим цепочку равенств: $\angle CBM = \angle BMA = \angle BOA = \angle COD = \angle CMD = \angle BCM$ (см. рис.). Первое и пятое равенства вытекают из параллельности оснований трапеции, второе и четвертое — из свойства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, третье — равенство вертикальных углов. Из доказанного вытекает, что $\angle CBM = \angle BCM$, то есть, $BM = CM$.



Интернет-ресурсы: <http://www.problems.ru>, <https://olimpiada.ru>.