10 класс – 2020

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в *комментариях* к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

10.1. Найдутся ли двенадцать различных целых чисел, среди которых ровно шесть простых чисел, ровно девять нечётных чисел, ровно десять неотрицательных чисел и ровно семь чисел больших десяти?

Решение. Да, например: -8, -4, 2, 5, 9, 11, 13, 15, 21, 23, 37, 81 .

Комментарии. Приведён любой правильный пример – 7 баллов.

10.2. Докажите, что для любых положительных чисел a и b с $ab = 1$ справедливо неравенство $a^3 + b^3 + 1 \geq 2a + b^2$.

Доказательство. $a^3 + 1/a^3 + 1 \geq 2a + 1/a^2$, $a^6 - 2a^4 + a^3 - a + 1 \geq 0$, $(a - 1)(a^5 + a^4 - a^3 - 1) \geq 0$, $(a - 1)^2 (a^4 + 2a^3 + a^2 + a + 1) \geq 0$ – верно.

10.3. Целое число 23713 обладает следующими двумя свойствами:

(1) любые две соседние цифры образуют простое двузначное число,

(2) все эти простые двузначные числа попарно различны.

Найдите наибольшее из всех целых чисел со свойствами (1) и (2).

Ответ: 617371311979.

Решение. Так как четные цифры и цифра 5 могут быть только в старшем разряде (причем только одна из таких цифр для образования одного простого числа), а остальные простые двузначные числа – 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97, то максимальное количество цифр в искомом числе равно 12. В искомом числе числа 19, 79, 97 встретятся только, если число из последних четырех цифр имеет вид 1979. С цифрой 7 кроме чисел 97 и 79 еще четыре числа, а это значит, что цифра 7 должна встретиться в искомом числе еще два раза, причем не на втором месте слева. В одном случае соседи цифры 7 – две цифры 1, а во втором – две цифры 3. Есть также четыре числа с цифрой 3. Значит, цифра 3 тоже не может быть на втором месте слева. Следовательно, на этом месте должна быть цифра 1. Тогда максимальное искомое число должно начинаться на 6. Остальные цифры несложно подобрать. Максимальное число 617371311979.

Комментарии. Только верный ответ – 3 балла. Показано, что количество цифр в искомом числе не больше двенадцати – 2 балла.

10.4 Найдите наименьшее целое положительное число k , для которого при любой раскраске чисел множества $M = \{1, 2, 3, \dots , k\}$ в два цвета найдутся десять не обязательно различных чисел одного цвета из множества M

, сумма которых также является числом из множества M и того же цвета, что и слагаемые.

Ответ: 109.

Решение. Пусть $k \ge 100$. Предположим, что для каждых 10 чисел одного цвета их сумма или число другого цвета, или не принадлежит M. Пусть число 1 первого цвета, а число 2 – второго. Тогда числа 10 и 20 – второго и первого цвета соответственно. Далее, число $28 = 10 + 9\cdot2$ – первого цвета, а $29 = 20 + 9\cdot1$ – второго цвета, $47 = 29 + 9\cdot2$ – первого цвета, а $37 = 28 + 9\cdot1$ – второго цвета. Если 3 – первого цвета, то $20 + 9\cdot3 = 47$ – второго цвета. Противоречие. Если 3 – второго цвета, то $10 + 9\cdot3 = 37$ – первого цвета. Противоречие. Пусть числа 1, 2,…,k – числа первого цвета ($9 \ge k \ge 2$). Тогда числа 10, 11, …, $10k$ - второго цвета, а числа 100, 101, … $100k$ – первого цвета. Тогда число $100 + 9\cdot1 = 109$ – должно быть числом второго цвета. Противоречие. Покажем, что есть раскраска чисел, что для $k = 108$ указанных 10 чисел не будет. Раскрасим числа 1,2, …, 9 – в первый цвет, числа 10, 11, …, 99 – во второй цвет, а числа 100, 101, …, 108 – в первый цвет. Сумма любых 10 чисел одного цвета или число другого цвета, или не является числом из множества M.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Приведён верный пример с k = 109 – 3 балла.

10.5. Дан треугольник ABC с AB = 1 и углом ABC = 120^0. На стороне AC отмечена точка T так, что TC = 1 и угол TBA = 90^0. Найдите AT . Ответ: $\sqrt[3]{2}$.

1-е решение. Обозначим за x искомый отрезок AT , а за $2y$ - отрезок BC . Опустим из точки C перпендикуляр CH на продолжение отрезка AB за точку B . Тогда CM параллельна BT , а угол BCH равен 30^0. Поэтому $BH = y$, $BH : TC = AT : AB$ ($y : 1 = 1 : x$) и , следовательно, $y = 1/x$. Теперь по «теореме косинусов» из треугольника ABC находим:

$$(x + 1)^2 = 1^2 + 4y^2 + 2y\ , \quad x^2 + 2x = 4y^2 + 2y = 4/x^2 + 2/x, \quad x^2 + 2x = (x^2 + 2x)\cdot\frac{2}{x^3}, \quad \text{откуда} \quad x = \sqrt[3]{2}\ .$$

2-е решение. Из точки T проведем перпендикуляр к BT до пересечения с BC в точке K. Пусть AT = x, TK = y, KC = z. В прямоугольном треугольнике TBK угол TBK равен 30°, поэтому BK = 2y. Так как AB и TK параллельны, то треугольники ABC и TKC подобны, значит $\frac{1}{y} = \frac{x+1}{1} = \frac{2y+z}{z}$. Отсюда $z = \frac{2y^2}{1-y}$ и $y = \frac{1}{1+x}$. Из треугольника TBK находим $BT^2 = 3y^2$, а из треугольника ABT $1 + \frac{3}{(1+x)^2} = x^2$. Перепишем уравнение в виде $\frac{(x+1)^3(x-1)-3}{(1+x)^2} = 0$. Знаменатель дроби не равен 0 при положительных x , поэтому уравнение можно записать в виде $(x +2)(x^3 – 2) = 0$. Единственное положительное решение: $x = \sqrt[3]{2}$.