Всероссийская олимпиада школьников 2020/2021 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
10 класс

Общее время выполнения работы – 4 часа 00 мин (240 минут).
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.
При наличии дополнительных критериев решение школьника оценивается в соответствии с ними.

Задание 10.1
Для всех действительных x и y выполняется равенство $f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2)$. Найдите $f(–1)$.
Количество баллов 7
Ответ 0.
Решение
Подставив $x = 0$, $y = 0$, получим $f(0) = f(0) + f(0)$, то есть $f(0) = 0$.
Подставив $x = 0$, $y = –1$, получим $f(–1) = f(0) + f(1)$, то есть $f(–1) = f(1)$.
Подставив $x = –1$, $y = –1$, получим $f(0) = f(–1) + f(1)$. Значит, $2f(–1) = 0$.

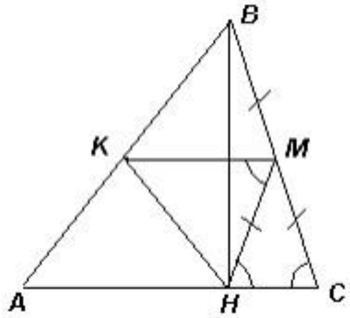
Задание 10.2
Докажите, что если числа x, y, z при некоторых значениях p и q являются решениями системы
$y = x^2 + px + q,\ z = y^2 + py + q,\ x = z^2 + pz + q,$
то выполнено неравенство $x^2y + y^2z + z^2x \geq x^2z + y^2x + z^2y$.
Количество баллов 7
Решение
Домножим первое, второе и третье уравнения системы соответственно на y, z и x и сложив их, получим:
$x^2 + y^2 + z^2 = x^2y + y^2z + z^2x + p(xy + xz + yz) + q(x + y + z)$.

С другой стороны, домножив первое уравнение исходной системы на z, второе – на x, а третье – на y и сложив, получим:
$xy + xz + yz = x^2z + y^2x + z^2y + p(xy + xz + yz) + q(x + y + z)$.
Отсюда $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y$.
Левая часть неотрицательна, а значит, неотрицательна и правая часть.

Задание 10.3
Ненулевые числа a и b удовлетворяют равенству $a^2b^2(a^2b^2 + 4) = 2(a^6 + b^6)$. Докажите, что хотя бы одно из них иррационально.
Количество баллов 7
Решение

Переписав равенство в виде $(a^4 - 2b^2)(b^4 - 2a^2) = 0$, получаем, что либо $\left(\frac{a^2}{b}\right)^2 = 2$, либо $\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 = 2$. Как известно, оба равенства невозможны при рациональных a и b.

Задание 10.4
В треугольнике ABC проведены высота BH и медианы AM и CK. Докажите, что треугольники KHM и ABC подобны.
Количество баллов 7
Решение



Рисунок

Из условия задачи, следует, что MK – средняя линия треугольника ABC, значит, $MK \parallel AC$ и $MK = 0,5AC$ (см. рис.). Так как HM – медиана прямоугольного треугольника BHC, то $HM = 0,5BC$. Кроме того, так как $HM = MC$, то $\angle ACB = \angle MHC = \angle HMK$. Тогда треугольники KHM и ABC подобны, так как $KM/AC = HM/BC$ и равны углы между этими сторонами.

Замечание
Вместо равенства углов можно использовать, что HK – медиана прямоугольного треугольника ABH, то есть $HK = 0,5AB$. Тогда треугольники подобны по трем сторонам.

Дополнительные критерии проверки
“7” *Приведено полное обоснованное решение*
“5-6” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
“2-3” *Доказано только, что $MK = 0,5AC$ или (и) $HM = 0,5BC$, но дальнейших продвижений нет*
“0” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

Задание 10.5
Бригада рабочих делает ремонт в квартире. Чтобы не испортить пол в комнате (клетчатый квадрат размером 4×4), они расстелили 13 двухклеточных ковриков по линиям сетки. Внезапно оказалось, что один коврик понадобился в другой комнате. Докажите, что

рабочие смогут его выбрать так, чтобы ремонт в квартире можно было продолжать, не испортив пол.

Количество баллов 7

Решение

Предположим, что убрать коврик, не оголив куска пола, нельзя. Тогда под каждым ковриком должна быть клетка, покрытая только один раз (иначе, коврик, под которым каждая клетка покрыта хотя бы дважды, можно забрать). Значит, клеток, покрытых в один слой, не меньше, чем 13. Тогда клеток, покрытых хотя бы в два слоя, не больше, чем $16 - 13 = 3$. Заметим, что любую клетку можно накрыть двухклеточными ковриками не более, чем четырьмя различными способами. Таким образом, все коврики в сумме накрывают не больше, чем $13\times1 + 3\times4 = 25$ клеток. Это противоречит тому, что 13 ковриков должны в сумме накрывать $2\times13 = 26$ клеток. Следовательно, один коврик можно убрать.

Дополнительные критерии проверки

“7” *Приведено полное обоснованное решение*

“5-6” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“2-3” *Присутствуют верные идеи, но решение не закончено или содержит ошибки*

“0” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*