10 класс

1. В ряд стоят 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек при этом может быть выше своего правого соседа? (Приведите все варианты и докажите, что других нет)
Ответ: 34.
Решение. Назовем 15 человек, которые выше своего левого соседа – дылдами.
Если от кого-то справа стоит дылда, то он его ниже, иначе он его выше.
Всего пар соседних людей – 49.
Дылды ровно в 15 парах находятся на правом месте. В остальных 49 – 15 = 34 парах справа стоит не дылда. Именно в этих парах человек выше своего соседа справа.
2. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс – в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}$. ($x_1$, x_2, x_3 – отличны от нуля.)
Решение. Пусть уравнение прямой $y = ax + b$.
Тогда графики пересекаются в точках с абсциссами, удовлетворяющими уравнению $x^2 - ax - b = 0$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = -b$, тогда $-\frac{a}{b}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.
Из $ax_3 + b = 0$, получаем, что $x_3 = -\frac{b}{a}$или $\frac{1}{x_3}=-\frac{a}{b}$, значит $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}$, что и требовалось доказать.

3. Докажите, что если $a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$, то $a^2 + b^2 < c^2$.
Решение.
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 0 > a^2 + b^2 + ab + bc + ca$=>
$c^2 + ab + bc + ca > 0 > a^2 + b^2 + ab + bc + ca$=> $c^2 > a^2 + b^2$что и требовалось доказать.

4. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Z соответственно. Отрезки CX и BZ пересекаются в точке Y. Оказалось, что пятиугольник $AXYZD$ — вписанный. Докажите, что $AY = DY$.
Решение.
Так $ABCD$ – трапеция, то $\angle BAD + \angle ABC = 180$.
Так как точки A, X, Z, D лежат на одной окружности, то $\angle BAD = \angle XAD = \angle XZC$.
Тогда $\angle ABC + \angle XZC = 180$, значит точки X, B, C, Z лежат на одной окружности.
Тогда равны углы (как опирающиеся на одну дугу) $\angle BXC = \angle BZC$.
Тогда равны и смежные им углы $\angle AXC = \angle DZB$.
А значит равны и углы $\angle AXY = \angle DZY$, тогда $AY = DY$ как хорды, на которые опираются одинаковые углы.

5. Максим выписал 2021 различное натуральное число и нашел их произведение. Оказалось, что это произведение делится ровно на 2020 различных простых чисел. Доказать, что из написанных Максимом чисел можно выбрать несколько чисел, произведение которых является полным квадратом, либо одно число, которое является полным квадратом.
Решение.
Рассмотрим всевозможные непустые подмножества множества из 2021 выписанных чисел. Их $2^{2021} - 1$.
Пронумеруем простые числа, на которые делится произведение чисел: p_1, p_2, …, p_{2020}.
В соответствие каждому подмножеству поставим код из 2020 чисел (a_1, a_2, …, a_{2020}), где каждое число это 0 или 1. $a_i = 0$, если i-е простое число входит в разложение на простые множители произведения чисел данного подмножества в четной степени, $a_i = 1$ в противном случае.
Всего различных кодов 2^{2020}, меньше, чем количество подмножеств. Значит найдутся два подмножества, которым соответсвуют одинаковые коды.
Пусть A – произведение чисел первого подмножества, B – произведение чисел второго подмножества с одинаковыми кодами. Тогда AB - является полным квадратом, так как каждое простое число входит в разложение на простые множители этого произведения в четной степени.

Это произведение состоит из первоначальных чисел, причем некоторые числа участвуют в произведении 1 раз (и такие числа есть, так как подмножества не совпадают), и возможно, есть числа, которые участвуют в произведении 2 раза. Удалим все числа, которые участвуют в произведении два раза, их произведение – полный квадрат, значит и произведение оставшихся чисел – полный квадрат. Мы нашли нужный нам набор чисел (возможно всего одно число).