10-й класс

10.1 $f(x) = kx + \ell$, $k \neq 0$. Докажите, что если $\ell < -\frac{k^2}{4}$, то графики функций $y = f(f(x))$ и $y = f^2(x)$ не пересекаются.

Решение. $f(f(x)) = kf(x) + \ell = k(kx + \ell) + \ell = k^2x + k\ell + \ell$,

$$f^2(x) = (kx + \ell)^2 = k^2x^2 + 2k\ell x + \ell^2.$$

Абсциссы точек пересечения графиков находим, приравнивая функции:

$$f^2(x) = f(f(x)), \quad \text{т.е.} \quad k^2x^2 + 2k\ell x + \ell = k^2x + k\ell + \ell,$$

$$k^2x^2 + k(2\ell - k)x + \ell^2 - \ell - k\ell = 0.$$

Для определения x получили квадратное уравнение. Найдем дискриминант

$$D = k^2(2\ell - k)^2 - 4k^2(\ell^2 - \ell - k\ell) =$$

$$= 4k^2\ell^2 - 4k^3\ell + k^4 - 4k^2\ell^2 + 4k^2\ell + 4k^3\ell =$$

$$= k^4 + 4k^2\ell = k^2(k^2 + 4\ell).$$

Если $k^2 + 4\ell < 0$, то $D < 0$ и корней нет, т.е. графики не пересекаются.

10.2 Докажите, что если a, b, c − попарно различные числа, то система уравнений

$$\begin{cases} x^3 - ax^2 + b^3 = 0, \\ x^3 - bx^2 + c^3 = 0, \\ x^3 - cx^2 + a^3 = 0 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Предположим, что система имеет решение x_0. При этом $x_0 \neq 0$ − очевидно (т.к. среди a, b, c есть числа, отличные от нуля). Вычитая из первого уравнения второе, а из второго третье, получим при $x = x_0$

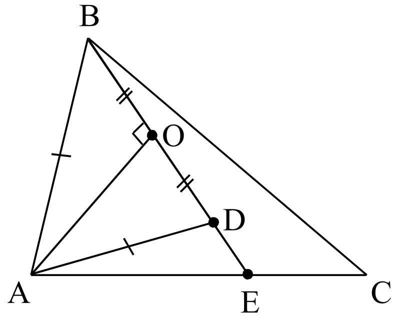
$$(b - a)x_0^2 + b^3 - c^3 = 0, \quad (c - b)x_0^2 + c^3 - a^3 = 0,$$

т.е. $x_0^2 = \frac{c^3 - b^3}{b - a}$, $x_0^2 = \frac{a^3 - c^3}{c - b}$.

Так как $x_0^2 > 0$, то обе дроби положительны, т.е. у каждой из них совпадают знаки числителя и знаменателя. Пусть, для определенности, $b - a > 0$, $b > a$. Тогда $c^3 - b^3 > 0$, $c^3 > b^3$, $c > b$. Значит, числитель второй дроби положителен: $a^3 - c^3 > 0$, $a^3 > c^3$, $a > c$. В итоге получили $b > a > c > b$. Противоречие.

10.3 Докажите, что если внутри треугольника ABC найдется точка D, для которой $AD = AB$, то $AB < AC$.

Решение. См. рис.



$AC > AE > AD = AB.$
Почему $AE > AD$?
Потому что $OE > OD$.

10.4 Дано десять различных целых чисел. Для каждых двух чисел подсчитали их разность (большее минус меньшее). Среди этих разностей оказалось ровно 44 различных. Докажите, что одно из исходных десяти чисел равно полусумме двух других.

Решение. Всего было подсчитано 45 разностей. Значит, какие-то две разности совпали. Если совпали разности $a - b$ и $b - c$, то $b = \frac{a+c}{2}$, и все доказано. А если бы совпали разности $a - b$ и $c - d$, (где все числа a, b, c, d различны), т.е. $a - b = c - d$, то совпали бы еще и разности $a - c$ и $b - d$, и различных разностей было бы не больше 43.

10.5 Для неотрицательных чисел x,y докажите неравенство

$$x^2 + xy + y^2 \le 3(x - \sqrt{xy} + y)^2.$$

Решение. Случай $x = y = 0$ очевиден. пусть хотя бы одно из чисел x,y положительно. Заметим, что, во-первых, $x + y \ge 2\sqrt{xy}$, и во-вторых, $x + y - \sqrt{xy} > 0$. Имеем:

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = (x + y)^2 - (\sqrt{xy})^2 = (x + y + \sqrt{xy})(x + y - \sqrt{xy}),$$

так что достаточно установить неравенство

$$x + y + \sqrt{xy} \le 3(x - \sqrt{xy} + y).$$

Т.е. неравенство $2(x + y) \ge 4\sqrt{xy}$, т.е. $x + y \ge 2\sqrt{xy}$. А это верно (среднее арифметическое не меньше среднего геометрического).