10 класс

10.1. Найдите сумму $\sin x+\sin y+\sin z$, если известно, что $\sin x=\operatorname{tg} y$, $\sin y=\operatorname{tg} z$, $\sin z=\operatorname{tg} x$.

Ответ. 0.

Первое решение. Из того, что $\sin x=\operatorname{tg} y$, получаем $\sin x\cos y=\sin y$. Отсюда $|\sin x|\cdot|\cos y|=|\sin y|$. Значит, $|\sin x|\ge|\sin y|$, причем неравенство обращается в равенство только если либо $\sin y=\sin x=0$, либо когда $|\cos y|=1$ (а, значит, опять $\sin y=\sin x=0$). Аналогично, из оставшихся уравнений получаем неравенства $|\sin y|\ge|\sin z|$ и $|\sin z|\ge|\sin x|$. Отсюда $|\sin x|\ge|\sin y|\ge|\sin z|\ge|\sin x|$. Поэтому $|\sin x|=|\sin y|=|\sin z|$. А так как все неравенства обратились в равенства, мы получаем, что $\sin x=\sin y=\sin z=0$, и $\sin x+\sin y+\sin z=0$.

Второе решение. Если один из синусов равен нулю, то равный ему тангенс равен нулю, значит, синус, стоящий в числителе тангенса, равен нулю. Последовательно получаем, что остальные синусы и тангенсы равны нулю. В этом случае $\sin x+\sin y+\sin z=0$.

Пусть ни один из синусов не равен нулю. Перемножив все три равенства, получим $\sin x\sin y\sin z=\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x\sin y\sin z}{\cos x\cos y\cos z}$. Так как $\sin x\sin y\sin z\ne 0$, то $\cos x\cos y\cos z=1$. Но это возможно только если $|\cos x|=|\cos y|=|\cos z|=1$, то есть синусы равны нулю, и рассматриваемый случай невозможен.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Ответ получен рассмотрением примера – 1 балл.

Неверно рассмотрен (или пропущен) хотя бы один случай – не более 3 баллов.

10.2. Дано выражение $A=xy+yz+zx$, где x, y, z – целые числа. Если число x увеличить на 1, а числа y и z уменьшить на 2, то значение выражения A не изменится. Докажите, что число $(-1)\cdot A$ – квадрат целого числа.

Решение. По условию $xy+yz+zx=(x+1)(y-2)+(y-2)(z-2)+(z-2)(x+1)$, откуда $4x+y+z=0$, или $x=-\dfrac{y+z}{4}$. Тогда $(-1)\cdot A=-(xy+yz+zx)=-yz-x(y+z)=$ $-yz+\dfrac{y+z}{4}(y+z)=\dfrac{(y+z)^2-4yz}{4}=\dfrac{(y-z)^2}{4}=\left(\dfrac{y-z}{2}\right)^2$. Так как $y+z=-4x$, то y и z одинаковой четности, поэтому число $\dfrac{y-z}{2}$ – целое.

Комментарий. Доказано, что $4x+y+z=0$ – 2 балла.

Получено равенство $(-1)\cdot A=\left(\dfrac{y-z}{2}\right)^2$, но не доказано, что выражение в скобках – целое число – 4 балла.

10.3. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^7>y^6$ и $y^7>x^6$. Докажите, что $x+y>2$.

Решение. Докажем, что $x>1$ и $y>1$, из чего и будет следовать доказываемое утверждение. Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа x и y положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на положительное число x^6y^6, получим: $xy>1$. Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел x и y больше 1. Пусть, например, $x>1$. Тогда из неравенства $y^7>x^6$ следует, что $y^7>1$, то есть $y>1$. Поэтому $x+y>2$.

Комментарий. Доказано, что $xy>1$ – 2 балла.
Доказано, что одно из чисел x и y больше 1 – еще 1 балл.
Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

Замечание. Другое доказательство того, что $x>1$ и $y>1$ можно получить, переписав неравенства в виде $x>y^{\frac{6}{7}}$ и $y>x^{\frac{6}{7}}$, и подставив x (y) из одного неравенства в другое (при этом в решении должна использоваться положительность чисел x и y).

10.4. В замке 16 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 4×4. В эти комнаты по одному человеку поселилось 16 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 16 человек казал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 16 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

Ответ. 12 рыцарей.

Решение. Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 4 (так мы покажем, что рыцарей не больше 12). Пусть лжецов не больше 3, тогда найдется «вертикальный ряд» комнат, в которых живут только рыцари. Но тогда у каждого из этих рыцарей должен быть сосед лжец (и эти соседи разные). Поэтому лжецов не меньше 4.

На рисунке показано, как могли поселиться 12 рыцарей и 4 лжеца.

Р	Л	Р	Р
Р	Р	Р	Л
Л	Р	Р	Р
Р	Р	Л	Р

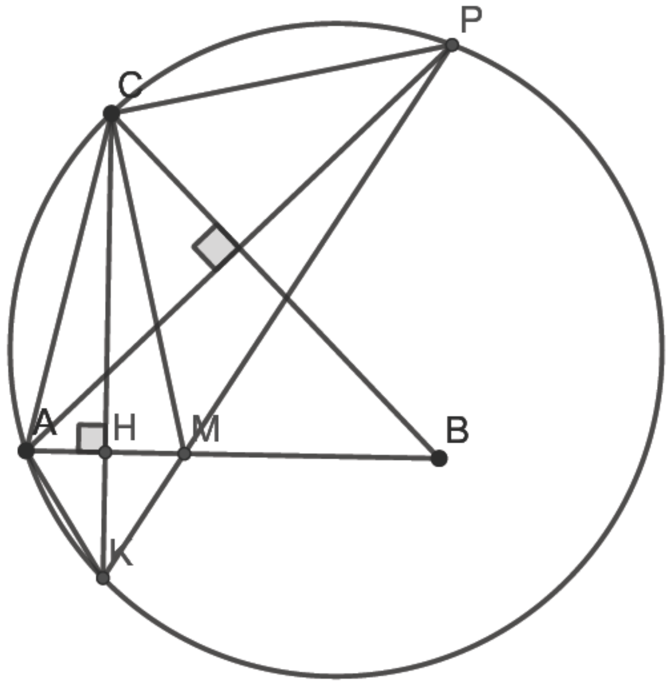
Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Пример расселения 4 лжецов и 12 рыцарей – 2 балла.
Доказано, что рыцарей не более 12 – 5 баллов.

Замечание 1. В примере лжецы не должны быть соседями.

Замечание 2. Оценку можно получить, заметив, что в трех комнатах – угловой и двух соседних к ней должен поселиться хотя бы один лжец.

10.5. В остроугольном треугольнике *ABC* проведена высота *CH*. Точка *P* симметрична точке *A* относительно прямой *BC*. Прямая *CH* вторично пересекает окружность, описанную около треугольника *ACP*, в точке *K*. Прямая *KP* пересекает отрезок *AB* в точке *M*. Докажите, что *AC*=*CM*.

Решение. В силу того, что CH – высота треугольника ACM, равенство $AC = CM$ равносильно тому, что CH – серединный перпендикуляр к отрезку AM, то есть тому, что KH – серединный перпендикуляр к отрезку AM. А это равносильно тому, что $AK = KM$, то есть равенству $\angle AKH = \angle MKH$, то есть $\angle AKC = \alpha = \angle CKP = \beta$. Но $\alpha = \angle CPA$ (вписанные, опираются на дугу AC), $\beta = \angle CAP$ (вписанные, опираются на дугу CP). Наконец, по условию точки A и P симметричны относительно прямой CB, значит, $AC = CP$, и тогда $\alpha = \angle CPA = \beta = \angle CAP$. Утверждение доказано.



Комментарий. Записано геометрическое утверждение, равносильное симметричности точек P и A – 1 балл.