Муниципальный этап Российской олимпиады школьников по математике
2020-21 учебного года
10 класс (*время решения – 4 часа*)

1. На склад зерна напала армия мышей. Чтобы бороться с мышами, на склад пустили кота, на следующий день – второго кота, и далее каждый день пускали еще одного кота. Мышь съедает за сутки 100 граммов зерна, а кот съедает за сутки 10 мышей. Через несколько дней мышей не осталось. После подсчета убытков оказалось, что за эти несколько дней мыши съели 55 кг зерна. Сколько было мышей? (Мышь успевает съесть 100 граммов зерна и в те сутки, когда она поймана котом.)

Решение. Пусть весь процесс длился n дней, тогда к его окончанию на складе жило n котов, при этом первый кот съел $10n$ мышей, второй – $10(n-1)$ мышей, … , n-й кот – 10 мышей, то есть всего мышей было $10(1+2+...+n)$. Посчитаем, сколько зерна съели мыши.
Десять мышей, пойманные котом в первый день, съели $10\cdot 0{,}1=1$ кг зерна.
Двадцать мышей, пойманные во второй день (двумя котами), съели за 2 дня $20\cdot 2\cdot 0{,}1=4$ кг зерна.
Тридцать мышей, пойманные в третий день, съели за 3 дня $30\cdot 3\cdot 0{,}1=9$ кг зерна.
Сорок мышей, пойманные в четвертый день, съели за 4 дня $40\cdot 4\cdot 0{,}1=16$ кг зерна.
Пятьдесят мышей, пойманные в пятый день, съели за 5 дней $50\cdot 5\cdot 0{,}1=25$ кг зерна.
Всего за пять дней было съедено $1+4+9+16+25=55$ кг зерна.
Следовательно, процесс длился 5 дней, а мышей, соответственно, было 150.
Критерии оценки. Допустима положительная оценка, если ход решения правильный, но не доведен до ответа из-за арифметических ошибок, - но не более 3-х баллов. В частности, если правильным путем установлено, что процесс продолжался 5 дней, но неправильно посчитано количество мышей, - 3 балла.

2. Найдите все пары действительных чисел x, y, удовлетворяющих уравнению
$$\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1+y^2}{2y}.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду: $4xy = (1+y^2)(1+x^2)$, что эквивалентно $1-2xy+x^2y^2+x^2-2xy+y^2=0$ или $(1-xy)^2+(x-y)^2=0$. Отсюда следует, что $x=y$ и $xy=1$, то есть решением данного уравнения являются две пары: $x=y=1$ и $x=y=-1$.

Критерии оценки. Найдена одна из двух пар без других продвижений – 0 баллов. Найдены обе пары – минимум 1 балл. Получено уравнение $(1-xy)^2+(x-y)^2=0$, но неправильно решено – 4 балла.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отмечены середины последовательных сторон: M,N,K,L. Найдите площадь четырехугольника $MNKL$, если $|AC|=|BD|=2a$, $|MK|+|NL|=2b$.

Решение. Так как MN, NK, KL и LM – средние линии треугольников ABC, BCD,CDA и DAB соответственно, то $MNKL$ – ромб со стороной a. Обозначим через O точку пересечения его диагоналей и рассмотрим треугольник MON. Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то ΔMON – прямоугольный. Обозначим длины его катетов x,y, тогда площадь ΔMON равна $\frac{1}{2}xy$, следовательно, площадь четырехугольника $MNKL$ равна $2xy$. С другой стороны, по условию задачи, $x^2+y^2=a^2$, $x+y=b$. Отсюда легко найти, что $2xy=b^2-a^2$, т.е. площадь четырехугольника $MNKL$ равна b^2-a^2.

Критерии оценки. Установлено, что $MNKL$ – ромб, – 1 балл. Выписаны все соотношения, позволяющие найти площадь $MNKL$ чисто алгебраически (площадь равна $2xy$, где $x^2+y^2=a^2$, $x+y=b$), но решение не найдено – 4 балла. Только ответ без продвижения в решении – 0 баллов.

4. В таблице 25×25 расставлены целые числа от 1 до 25, причем в каждой строке встречается весь набор чисел. Таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего в правый нижний угол. Докажите, что на этой диагонали также встречаются все числа от 1 до 25.

Решение. Предположим, что на диагонали встречаются не все числа. Тогда число, которое на диагонали отсутствует, может находиться только выше или ниже диагонали. Но таблица симметрична относительно диагонали, следовательно, это число встречается в таблице четное число раз. Но это невозможно, так как по условию задачи каждое число встречается ровно 25 раз. Мы пришли к противоречию, следовательно, наше предположение неверно, и на диагонали встречаются все числа от 1 до 25.

Критерии оценки. Указано, что число, отсутствующее на диагонали, встречается в таблице четное число раз, – минимум 3 балла.

5. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность целых чисел, в которой каждый элемент с нечетным номером (начиная с третьего) есть среднее арифметическое, а каждый элемент с четным номером – среднее геометрическое соседних с ним членов?

Решение. Да, существует. Вот один из возможных примеров:

$$1,\ 1\cdot 2,\ 2^2,\ 2\cdot 3,\ 3^2, \dots, n^2,\ n(n+1),\ (n+1)^2, \dots$$

Критерии оценки. Только ответ «да» - 0 баллов. Любые рассуждения, не приводящие к правильному ответу – 0 баллов. Несколько правильных первых членов последовательности без указания общей формулы – максимум 4 балла.