МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 2020-2021 уч. год
10 класс
(4 часа)

1. «В Контакте» опубликовали следующую информацию: «На сайте министерства образования появилось 40 отрицательных отзывов об олимпиаде по математике, а на сайте городского комитета образования отрицательных отзывов оказалось в 1,5 раза больше, чем на министерском сайте. При этом на сайте СГУ отрицательных отзывов в 5 раз меньше, чем на двух других сайтах вместе взятых. Известно, что половина из всех писавших отрицательные отзывы послала свои отзывы на два сайта из трёх, а другая половина на все три сайта». Можно ли верить этой информации и сколько людей написали отрицательные отзывы?

   Ответ: Информация «В Контакте» – это фейк. Достоверной информации о количестве людей, писавших отрицательные отзывы, нет. Принимается ответ 0 человек.

   Решение. На сайте городского комитета отрицательных отзывов всего $1{,}5 \times 40 = 60$. На этих двух сайтах вместе $40+60=100$. Тогда на сайте СГУ отрицательных отзывов $100:5=20$. Значит, всего написано 120 отзывов. Пусть x – это половина от числа людей, писавших отрицательные отзывы. Тогда всего должно быть написано $2x+3x$ отзывов. Получаем уравнение $5x=120$, откуда $x=24$. Следовательно, всего людей, написавших отрицательные отзывы $2\times 24=48$.

   А теперь проверим полученный ответ. Так как 24 человека писали на все сайты, то на сайте СГУ должно было быть не менее 24 отзывов. Противоречие. Следовательно, такого быть не могло. Информация «В Контакте» – это фейк. Никто не писал отрицательные отзывы.

   Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
   Только верный ответ без обоснования – 1 балл.
   Если получен ответ 48 человек и не проверено, что он противоречит условию – 3 балла.
   Если верное решение – 7 баллов.

2. 50 бизнесменов – японцы, корейцы и китайцы – сидят за круглым столом. Известно, что между любыми двумя ближайшими японцами сидит ровно столько китайцев, сколько всего за столом корейцев. Сколько китайцев может быть за столом?

   Ответ: 32.

   Решение. Пусть всего за столом – x корейцев и y японцев, тогда китайцев – xy. По условию: $x + y + xy = 50$. Прибавив по 1 к обеим частям равенства и разложив обе части на множители, получим: $(x + 1)(y + 1) = 17\times 3$. Так как $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то один из множителей равен 3, а другой – 17.

   Таким образом, $x = 2$, $y = 16$ или $x = 16$, $y = 2$. В обоих случаях $xy = 32$.

   Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
   Только верный ответ – 1 балл.
   Если рассмотрен только один случай $x = 2$, $y = 16$ или $x = 16$, $y = 2$ – 5 баллов.
   Если верное решение – 7 баллов.

3. Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство

$$\frac{x}{x+5y}+\frac{y}{y+5x}\leq 1.$$

Решение.

Используем лемму.

Лемма. Если $a>0,\ b>c>0$, то $\frac{c}{b}<\frac{c+a}{b+a}$.

Тогда получим

$$\frac{x}{x+5y}\leq\frac{5x}{5x+5y}$$
$$\frac{y}{y+5x}\leq\frac{5y}{5y+5x}$$

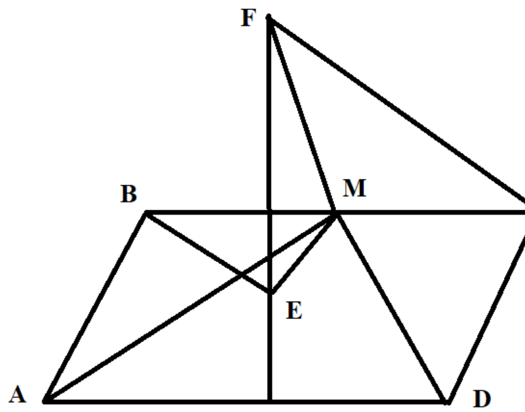
Сложив эти неравенства, получим

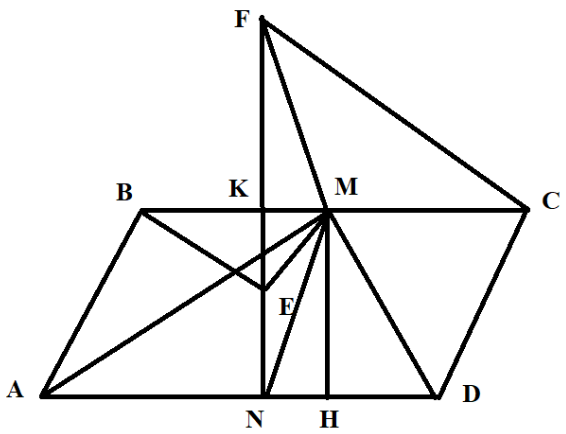
$$\frac{x}{x+5y}+\frac{y}{y+5x}\leq\frac{5x+5y}{5x+5y}=1.$$

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если верное решение – 7 баллов.

4. Дан параллелограмм *ABCD* с острым углом *A*. На серединном перпендикуляре к *AD* выбраны точки *E* и *F* таком образом, что ∠*ABE*=∠*DCF*=90°. Точка *M* – середина *BC*. Докажите, что ∠*AMD* =∠*EMF*.

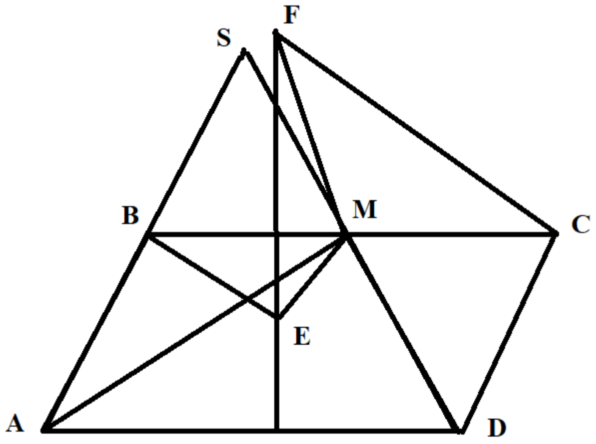
Решение.





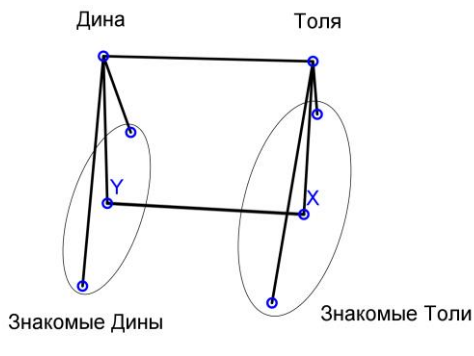
Первый способ. Пусть *N* – середина *AD*, точка *K* – точка пересечения *FN* и *BC*, прямая *MH* перпендикулярна *AD*. Обозначим *AN*=*ND*=*a*. Тогда по свойству параллелограмма *BM*=*MC*=*a*. Обозначим *NH*=*b*. Тогда по свойству прямоугольника *MK*=*b*. Обозначим *MH*=*c* и *FK*=*d*. Так как отрезки *MC* и *ND* равны и параллельны, то по признаку параллелограмма MCDN – параллелограмм. Тогда по свойству параллелограмма ∠*MND*+∠*NDC*=180°. По сумме углов выпуклого четырёхугольника получаем, что ∠*NFC*+∠*NDC*=180°. Отсюда следует, что ∠*MNH*=∠*KFC*. Следовательно, прямоугольные треугольники *MNH* и *KFC* подобны по острому углу. Из подобия следует $\frac{c}{b}=\frac{a+b}{d}\Leftrightarrow\frac{c}{a+b}=\frac{b}{d}$ Тогда прямоугольные треугольники *MAH* и *MFK* подобны по двум катетам. Значит, ∠*MAH*=∠*MFK*. Аналогично доказываем, что ∠*MDH*=∠*MEK*. Отсюда по сумме углов в треугольнике получаем, что ∠*AMD* =∠*EMF*.

Второй способ. Пусть точка S – точка пересечения прямых AB и DM. Тогда треугольники BMS и ADS подобны по двум углами, так как прямые BM и AD параллельны. Тогда $BS:AS=BM:AD=1:2$ и, следовательно, $AB=BS$. Значит, BE – серединный перпендикуляр к отрезку AS и точка E является точкой пересечения серединных перпендикуляров к AS и к AD. Тогда через неё проходит серединный перпендикуляр к третьей стороне треугольника DS. Значит, $\angle END=90°$. Аналогично доказывается, что $\angle FMA=90°$. Отсюда получаем, что $\angle AMD =\angle EMF$.



Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если найдены некоторые пары нужных подобных треугольника (например, MAH и MFK) – 3 балла.
Если верное решение – 7 баллов.

5. У любых двух незнакомых людей в компании есть ровно двое общих знакомых. Дина и Толя знакомы друг с другом, но не имеют общих знакомых. Докажите, что Дина и Толя имеют одинаковое число знакомых в этой компании.



Решение. Ввиду симметричности понятия знакомства можно считать, что у Дины знакомых не меньше, чем у Толи. Пусть Y – знакомый Дины. Поскольку у Дины и Толи нет общих знакомых, то Y и Толя не знакомы друг с другом и у них есть двое общих знакомых. Один общий знакомый – это Дина, а второго обозначим X. Значит, X знакомый Толи. Следовательно, каждый знакомый Дины знаком со знакомым Толи и притом только одним, так как общих знакомых только два. Значит, знакомых у Толи не меньше, чем у Дины. Поэтому знакомых у них поровну.

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если верное решение – 7 баллов.