10 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

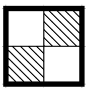
баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

1. Даны два отрезка длины 1 и $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Можно ли с помощью циркуля и линейки без делений построить отрезок длины $\sqrt{6}$?

Решение.

Да, можно. $2020x^4 + x + 1 \to 2020x^4 + 1 \to 2x^4 + 1 \to x^4 + x + 1 \to 2x + 1 \to 2020x + 1 \to x^4 + 2020x + 1$

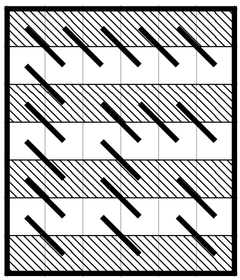
Заметим, что $x^4 + x + 1$ не имеет целых корней, т.к. Целые корни находятся среди делителей свободного члена.



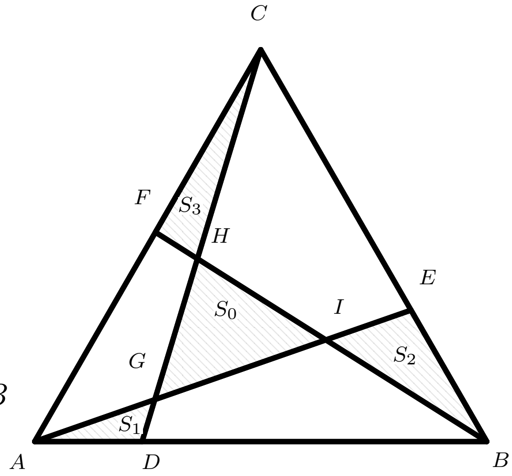
2. Дана клетчатая доска 7×6. Нёд — фигура из двух клеток, имеющих одну общую вершину (на рисунке два нёда — белый и заштрихованный). Какое максимальное количество нёдов по непересекающимся клеткам можно вырезать из этой доски?

Решение.

Покрасим доску 7×6 так, как показано на рисунке. Тогда каждый нёд будет занимать одну закрашенную и одну незакрашенную клетку. Значит, количество нёдов, которые можно уместить на эту доску — не больше 18. Пример показан на том же рисунке.



3. В правильном треугольнике ABC проведены отрезки AE, BF, CD так, как показано на рисунке. Площади заштрихованных треугольников равны S_0, S_1, S_2, S_3, причем $S_0 = S_1 + S_2 + S_3$, $S = 5S_0$, где S — площадь треугольника ABC. Докажите, что $BC = BE + CF + AD$.



Решение. Обозначим площади четырехугольников $CHIE$, $DGIB$ и $GHFA$ как a, c и b соответственно. Тогда

$$\frac{S_{ABE}}{S} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{S_1 + c + S_2}{S} = \frac{BE}{BC};$$
$$\frac{S_{FCB}}{S} = \frac{CF}{AC} \Rightarrow \frac{a + S_2 + S_3}{S} = \frac{CF}{BC};$$
$$\frac{S_{ACD}}{S} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{S_3 + b + S_1}{S} = \frac{AD}{BC}.$$

Поэтому

$$\frac{2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + a + b + c}{S} = \frac{BE + CF + AD}{BC} \Rightarrow 1 = \frac{BE + CF + AD}{BC}.$$

4. Функция $f(x)$ такова, что для всех значений x выполняется равенство $f(x+1) - f(x) = x + 1$. Известно, что $f(0) = 4$. Найдите $f(62)$.

Решение.

$$f(62) - f(61) = 61 + 1 = 62 \to f(62) - f(0) = 31 * 63 = 1953$$

Значит, $f(62) = 1957$.

5. Прибор должен из многочлена $2020x^4 + x + 1$, меняя его коэффициенты, получить за несколько шагов многочлен $x^4 + 2020x + 1$ так, чтобы ни на одном из шагов не получался многочлен с целыми корнями. Сумеет ли этот прибор выполнить преобразования, если он умеет делать за один шаг только одну из двух операций: **1)** изменять (увеличить или уменьшить) на 1 какой-либо один (на каждом шаге любой) коэффициент многочлена; **2)** изменять одновременно на единицу какие-либо два (на каждом шаге любые) коэффициента многочлена?

Решение. Пусть $P(x) = 2020x^4 + x + 1$ и $Q(x) = x^4 + 2020x + 1$. Имеем, $P(-1) = 2020 > 0$ и $Q(-1) = -2020 < 0$. Применяя операцию **1)**, прибор изменяет значение трехчлена в точке -1 на ± 1, поэтому один из промежуточных трехчленов будетиметь корень -1. Применяя операцию **2)**, прибор или не меняет значение в точке -1, или изменяет его на ± 2, поэтому один из трехчленов будет иметь корень -1, так как $P(-1)$ и $Q(-1)$ — четные числа. Значит, такое невозможно.