

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

10 класс

1. *Ответ:* 8160799.

Решение. Разобьем последовательность на группы следующим образом:

$$\left\{\frac{1}{1}\right\}; \left\{\frac{2}{1}; \frac{1}{2}\right\}; \left\{\frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}\right\}; \left\{\frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}\right\}; \dots$$

Заметим следующие закономерности:

- 1) в группе под номером N содержится N членов последовательности;
- 2) в группе под номером N числители дробей убывают от N до 1, знаменатели возрастают от 1 до N ;
- 3) сумма числителя и знаменателя дроби, содержащейся в группе под номером N , равна $N+1$.

Тогда число $\frac{2021}{2019}$ попадает в группу под номером 4039 и стоит в этой группе на 2019-м месте. Таким образом, для того, чтобы определить место этого числа в последовательности, нужно сложить все натуральные числа от 1 до 4039 и прибавить 2019:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 4039 + 2019 = \frac{1 + 4039}{2} \cdot 4039 + 2019 = 8160799.$$

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. Получено выражение, использующее формулу суммы арифметической прогрессии, даже если окончательно значение выражения не вычислено.
5	Верное решение. Имеются небольшие погрешности, в целом не влияющие на решение. Выявлена закономерность, указан способ вычисления требуемого значения, но выражение для его вычисления не составлено.
3-4	Найдены вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. Выявлены некоторые закономерности.
1-2	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции получен верный вывод, который не обоснован рассуждениями.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2020-2021 учебный год

0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

2. *Решение.* Так как $xyz = 0,5$ и $y^2 + z^2 \geq 2yz$, то

$$\frac{xy^2}{x^3 + 1} = \frac{xy^2}{x^3 + 2xyz} = \frac{y^2}{x^2 + 2yz} \geq \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad \text{Аналогично: } \frac{yz^2}{y^3 + 1} \geq \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{и}$$

$$\frac{zx^2}{z^3 + 1} \geq \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad \text{Сложим полученные неравенства:}$$

$$\frac{xy^2}{x^3 + 1} + \frac{yz^2}{y^3 + 1} + \frac{zx^2}{z^3 + 1} \geq \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1, \text{ что и требовалось}$$

доказать.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное доказательство.
5-6	Доказательство содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для доказательства, но рассуждения содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования доказательства не содержит.
0	Доказательство отсутствует.

3. *Решение.* Перепишем функцию y , раскрыв модуль:

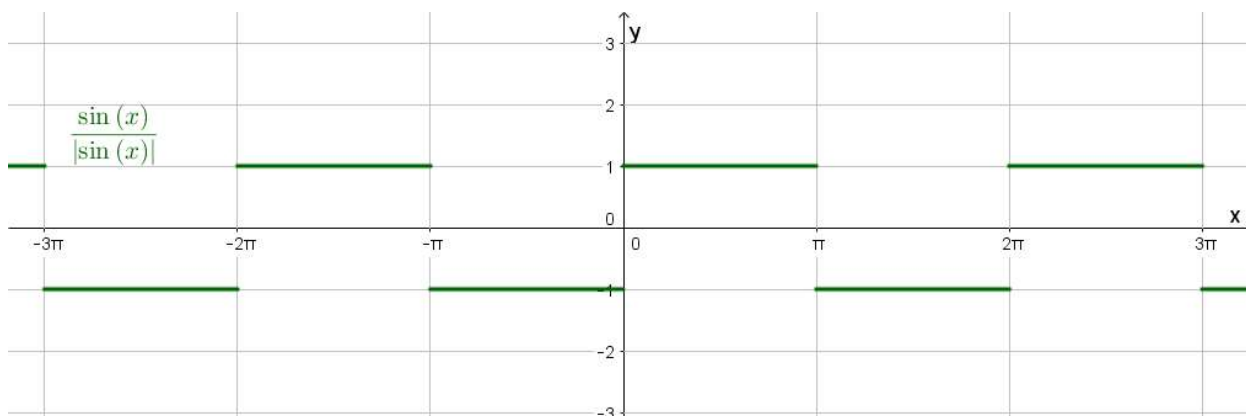
$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } \sin x > 0, \\ -1 & \text{если } \sin x < 0. \end{cases}$$

$\sin x > 0$ на промежутках вида $(\pi(2n - 1); 2\pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$,

$\sin x < 0$ на промежутках вида $(2\pi n; \pi(2n + 1))$, где $n \in \mathbb{Z}$,

Поэтому множество точек, удовлетворяющих заданному условию, представляет собой объединение отрезков с выколотыми концами, параллельных оси абсцисс (см. рисунок ниже).

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2020-2021 учебный год



Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, полученные при преобразовании выражений или при решении тригонометрического неравенства, но идея решения реализована верно.
3-4	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции построена часть графика или отдельные точки.
1-2	Построен график функции без учета модуля и/или области определения выражения, без учета промежутков знакопостоянства функции синус.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

4. *Решение.* На прямой выберем какую-нибудь точку и проведем через нее прямую, параллельную прямой c (рис. 1).

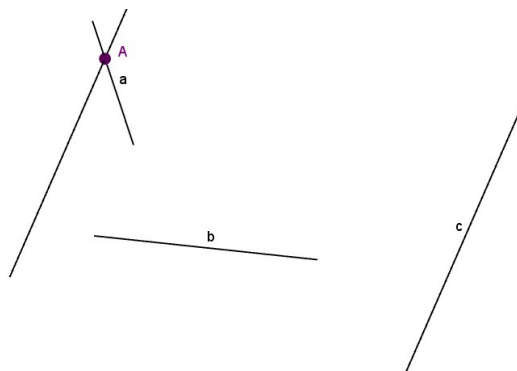


Рис. 1.

Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость (рис. 2). Эта плоскость параллельна заданной прямой c , т.к. проходит через прямую, ей параллельную.

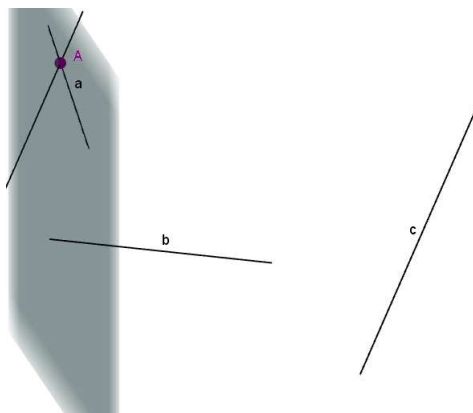


Рис. 2.

Аналогично поступим с прямой b (рис. 3).

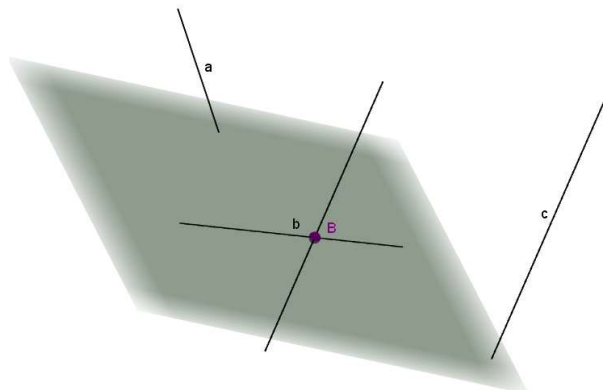


Рис. 3.

Построим линию пересечения этих плоскостей (рис. 4а, б).

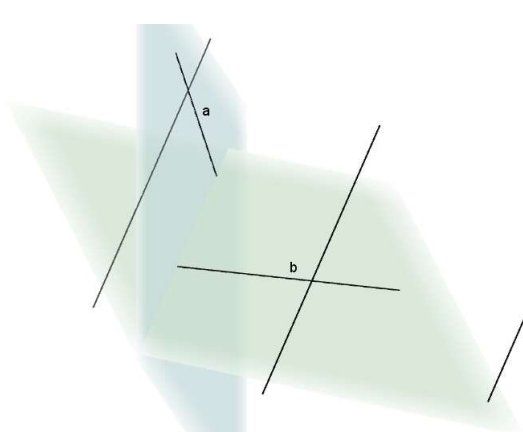


Рис. 4а.

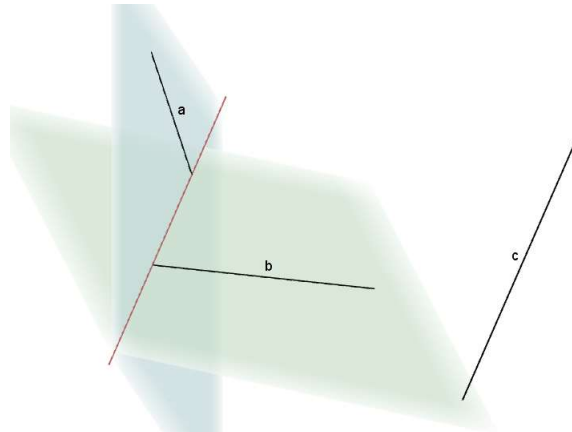


Рис. 4б.

Полученная прямая параллельна прямой c и пересекает каждую из прямых a и b .

При решении задачи используются следующие теоремы:

*Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2020-2021 учебный год*

1. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельная какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.
2. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную данной плоскости, и пересекает эту плоскость, то линии пересечения плоскостей параллельны.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Построена прямая, удовлетворяющая требованию задачи. Некоторые из дополнительных построений не обоснованы.
3-4	Построена прямая, удовлетворяющая требованию задачи. Проведены параллельные прямые, через них проведены плоскости, однако их построение не комментируется.
1-2	Построены плоскости и линия их пересечения. Построения не обоснованы.
0	Решение отсутствует.

5. *Ответ:* 256

Решение. При любой расстановке скобок данное выражение можно представить в виде дроби. Тогда, так как все данные числа – простые, результат вычислений будет однозначно определяться тем, куда «попало» каждое из этих чисел: в числитель или в знаменатель. Очевидно, что независимо от расстановки скобок, число 2 попадает в числитель, а число 3 – в знаменатель. Каждое из следующих чисел может «попасть» как в числитель, так и в знаменатель, например, если $2 : (3 : 5) \dots$, то число 5 – в числителе, а если $(2 : 3) : 5 \dots$, то число 5 – в знаменателе.

Докажем, что существуют расстановки скобок, при которых каждое из чисел 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 «попадает» как в числитель, так и в знаменатель, независимо от расположения остальных чисел. Для этого, например, разобьем все данные числа, начиная с числа 3, на группы следующим образом: каждая группа начинается с числа, которое должно «попасть» в знаменатель, и может содержать еще несколько (в том числе, и ноль) чисел, идущих следом за ним, которые все должны «попасть» в числитель. Эти группы заключаем в скобки и больше нигде скобок не ставим. Тогда, первое число каждой группы попадет в знаменатель, так как на него непосредственно делится двойка, а остальные числа группы «попадут» в числитель, так как на них делится первое число из этой группы, «попавшее» в знаменатель.

*Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2020-2021 учебный год*

Таким образом, количество чисел, которые могут являться значением данного выражения при всех возможных расстановках скобок, равно $2^8 = 256$.

Эту задачу можно обобщить для любого количества чисел, причем они не обязательно должны быть простыми. Расставляя всеми возможными способами скобки в выражении $a_1 : a_2 : \dots : a_n$, где каждые два числа – взаимно просты, можно получить 2^{n-2} различных значения

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.