Условия и решения задач
(районная математическая олимпиада 2020 г.)

11 класс

1. Существуют ли такие целые числа *a*, *b* и *c*, что дискриминант квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равен 2019?

Решение: Допустим, что дискриминант указанного уравнения равен числу 2019. Тогда можно записать: $b^2 – 4ac = 2019$, и $b^2 – 1225 = 4ac + 794$ или $(b – 35)\cdot(b + 35) = 2(2ac + 397)$. Заметим, что b – 35 и b + 35 – числа одинаковой чётности, поэтому их произведение, если оно чётно, делится на 4. Правая часть последнего равенства есть чётное число, не делящееся на 4. Получено противоречие, значит, сделанное допущение ложно.

Ответ: нет.

2. Найдите сумму:

$$\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{2}{2008\cdot2009\cdot2010}$$

Решение:

Заметим, что $\dfrac{2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}$.

Отсюда следует, что требуемая сумма равна:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}$$

Легко видеть, что все слагаемые, кроме первых двух и последних двух сокращаются, таким образом получаем:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}=\frac{1009522}{2019045}$$

Ответ: 1009522/2019045.

3. Постройте график функции $y = (4\sin4x – 2\cos2x + 3)^{0,5} + (4\cos4x + 2\cos2x + 3)^{0,5}$.

Решение:

$y = \sqrt{4sin^4x - 2cos2x + 3} + \sqrt{4cos^4x + 2cos2x + 3}$;

$y = \sqrt{4sin^4x - 2 + 4sin^2x + 3} + \sqrt{4cos^4x + 4cos^2x - 2 + 3}$;

$y = \sqrt{4sin^4x + 4sin^2x + 1} + \sqrt{4cos^4x + 4cos^2x + 1}$;

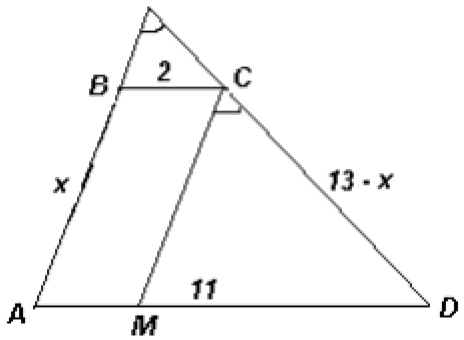
$y = 2sin^2x + 1 + 2cos^2x + 1$, $y = 4$.

Ответ: Графиком функции будет прямая $y = 4$.

4. Основания описанной трапеции равны 2 и 11. Докажите, что продолжения боковых сторон трапеции пересекаются под острым углом.

Доказательство. Пусть ABCD – данная трапеция с основаниями BC = 2 и AD = 11 (см. рисунок). Проведём CM || BA, тогда угол между продолжениями боковых сторон трапеции равен углу DCM. Пусть CM = AB = x, тогда DC = 13 – x (так как ABCD – описанная трапеция). В треугольнике DCM: $MD^2 = (AD – BC)^2 = 81$; $CM^2 + CD^2 = x^2 + (13$

$- x)^2$. Так как $CM^2 + CD^2 - MD^2 = 2x^2 - 26x + 88 = 2(x - 6{,}5)^2 + 1{,}75 > 0$, то $CM^2 + CD^2 > MD^2$, значит, угол DCM – острый, что и требовалось доказать.



5. Найдите наименьшее натуральное число *A*, которое делится на *p*, оканчивается на *p* и имеет сумму цифр, равную *p*, если известно, что *p* – простое число и является кубом натурального числа.

Решение. Пусть $2p+1 = n^3$. Тогда $(n-1)(n^2+n+1) = 2p$. Число 2p может иметь только следующие положительные делители: 1, 2, p, 2p . Число n, очевидно, нечѐтно, поэтому $n - 1$ делится на 2 . Число n^2+n+1 больше 1, поэтому $n-1 = 2$, $n^2+n+1 = p$. Отсюда $n = 3$, $p = 13$. Искомое число A представим в виде A = Bx100 + 13, где число B – число A без двух последних цифр. Поскольку A делится на 13, то B тоже делится на 13. Сумма цифр числа B равна 13 – (1+3) = 9, то есть B делится на 9, а т.к. 9 и 13 числа взаимно простые, то B делится и на 9x13 = 117 . Наименьшим из таких чисел является само число B = 117, тогда A = 117x100+13 = 11713.

Ответ: 11713.