МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС

Максимальное число баллов за одну задачу — 7, максимальное общее число баллов — 35

Продолжительность — 4 часа.

В каждой задаче требуется предъявить развернутое решение.

11.1. Решая уравнение $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$, Вася получил среди корней ровно один отрицательный. Не ошибся ли Вася?

Ответ: да, ошибся.

Решение: Преобразуем уравнение: $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = x(3x^2 + 4)$.

Если $x < 0$, то $(x^2 - 1)^2 \geq 0$, а $x(3x^2 + 4) < 0$ значит, полученное равенство при любом отрицательном значении x будет неверным. Следовательно, отрицательных корней нет.

Критерии:

7 баллов – приведено полное обоснованное решение;

5 баллов – приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, утверждается, что $(x^2 - 1)^2 > 0$ при всех значениях x;

только ответ или неверное решение – 0 баллов.

11.2. Прямая с положительным угловым коэффициентом проходит через точку (0, 2020) и пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках с целыми координатами. Какие значения может принимать угловой коэффициент? Перечислите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

Ответ: 81, 192, 399, 501, 1008, 2019

Решение:

Уравнение прямой $y = kx + b$. Т.к. прямая проходит через точку (0, 2020), то $b = 2020$.

Точки пересечения параболы и прямой являются целыми и различными корнями уравнения $x^2 = kx + 2020$, или $x^2 - kx - 2020 = 0$. Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k, \\ x_1 x_2 = -2020, \end{cases}$$

Т.к. корни целые, они являются делителями числа –2020. Разложим –2020 на множители. Очевидно, множители имеют разный знак. Заметим, что больший по модулю корень – положительный, а меньший по модулю – отрицательный (так как $k > 0$):$-2020 = -1\cdot 2020 = -2\cdot 1010 = -4\cdot 505 = -5\cdot 404 = -10\cdot 202 = -20\cdot 101$.

Для каждого варианта выпишем k: (–1+2020) = 2019; (–2+1010) = 1008; (–4+505) = 501; (–5+404) = 399; (–10+202) = 192; (–20+101) = 81. Итого существует шесть различных вариантов.

Критерии:

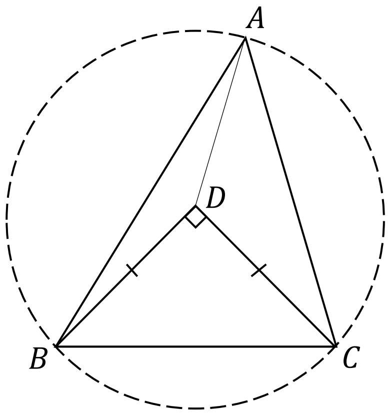
7 баллов – верный ответ и полное верное решение;

за потерю каждого решения снимать 1 балл;

только ответ – 0 баллов.

11.3. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle B = 60^0$, $\angle C = 75^0$. На стороне BC как на гипотенузе внутрь треугольника ABC построен равнобедренный прямоугольный треугольник BDC. Чему равен угол DAC?

Ответ: 30^0.



Решение 1: Из условия задачи следует, что $\angle A = 45^0$. Проведем окружность с центром M и радиусом MB = MC. Так как $\angle BDC = 90^0$, то большая дуга BC видна под углом 45^0. Следовательно, вершина A принадлежит этой окружности. Значит, треугольник ADC – равнобедренный, тогда $\angle DAC = \angle DCA = \angle BCA - \angle DCB = 75^0 - 45^0 = 30^0$.

Решение 2: Пусть BC = a, тогда из треугольника BMC: $DC = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Из треугольника ABC по теореме синусов получим, что $\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$, то есть $AC = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Далее, из треугольника CDA по теореме косинусов:

$$AD^2 = CD^2 + CA^2 - 2CD \cdot CA \cdot \cos DCA = \frac{a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} - 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2},$$

то есть $AD = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Следовательно, треугольник ADC – равнобедренный. Дальнейшие вычисления как в решении 1.

Критерии:

7 баллов – верный ответ и полное обоснованное решение;

5 баллов – доказано, что треугольник ABC – равнобедренный, но в дальнейшем допущена арифметическая ошибка;

только ответ – 0 баллов.

11.4. Докажите неравенство $(1 + x + x^2 + \dots + x^{2020}) \cdot (1 + x^{2020}) \geq 4040x^{2020}$, где $x \geq 0$.

Решение:

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{2020}) \cdot (1 + x^{2020}) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2020} + x^{2020} + x^{2021} + \dots + x^{4040} =$$
$$(1 + x^{4040}) + (x + x^{4039}) + (x^1 + x^{4038}) + \dots + (x^{2020} + x^{2020}) \geq 2021 \cdot 2x^{2020} = 4042x^{2020}$$
$$\geq 4040x^{2020}.$$

В решении воспользовались неравенством Коши (между средним арифметическим и средним геометрическим)

$\frac{x^n + x^{4040-n}}{2} \geq \sqrt{x^n \cdot x^{4040-n}}$, откуда $x^n + x^{4040-n} \geq 2x^{2020}$.

Критерии:

7 баллов – полное верное доказательство;

3-5 баллов – частично верное продвижение в решении.

11.5. В математическом классе учится 36 учеников. Ровно один из них стал недавно победителем математической олимпиады. Каждый из его одноклассников имеет с ним ровно пять общих друзей. Докажите, что в классе есть ученик с нечетным числом друзей.

Решение

Пусть это не так и каждый ученик в классе имеет четное число друзей. Разобьем класс на три группы. В первой группе будет только победитель, во второй группе – его друзья (их четное число), в третьей группе – все остальные (их останется нечетное число).

Каждый школьник из третьей группы имеет четное число друзей, причем пятеро из них – во второй группе, значит оставшиеся друзья (их нечетное количество) – все в третьей группе.

Таким образом, каждый школьник из третьей группы имеет нечетное количество друзей внутри группы, в которой нечетное количество участников. Докажем, что этого не может быть.

Пусть все друзья поздороваются друг с другом за руку. Очевидно, в сумме будет протянуто нечетное количество рук. Но при этом все руки при рукопожатии разобьются на пары, а это невозможно.

Критерии

Полное верное доказательство -- 7 баллов

Тем или иным верным способом сводится к лемме о рукопожатиях, доказательства леммы нет – 4 балла.

Неверная попытка свести к лемме о рукопожатиях, доказательство леммы приводится – не более 3 баллов.