

Материалы для проведения муниципального этапа Российской
олимпиады школьников по математике
в республике Башкортостан
1 декабря 2020 года

Составитель заданий: Р. Г. Женодаров

Рецензенты: к.ф.-м.н. Н. Ф. Валеев, к.ф.-м.н. К. П. Исаев,
к.ф.-м.н. В. И. Луценко

**Общие указания по проверке решений олимпиадных заданий
по математике.**

*Для повышения качества проверки обязательным является
требование двух независимых проверок каждого решения.*

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог
подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	План решения верный и может стать полностью правильным после исправлений или дополнений
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Следует иметь в виду, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

При оценке решения задачи в первую очередь нужно исходить из общих критериев, но учитывать конкретные критерии по задачам.

Задачи, наброски решений, критерии по отдельным задачам.

11 класс

1. Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 2} = y - 1; \\ \sqrt{2y^2 + 2} = z - 1; \\ \sqrt{2z^2 + 2} = x - 1. \end{cases}$$

Ответ: Система не имеет решений.

Набросок решения. Возведя каждое из уравнений в квадрат и сложив их, перенесём все слагаемые левую часть. Выделив полные квадраты, получим $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 0$. Откуда $x=y=z=-1$. Проверка показывает, что эта тройка не подходит, так как в этом случае левая часть каждого уравнения положительна, а правая отрицательна.

Критерии. Утверждается, что тройка $(-1, -1, -1)$ – решение. Не сделана проверка: 3 балла.

2. Доказать, что если $\cos x + \cos y + \cos z = 0$, то
$$\cos^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{y}{2} + \cos^4 \frac{z}{2} = \sin^4 \frac{x}{2} + \sin^4 \frac{y}{2} + \sin^4 \frac{z}{2}.$$

Набросок решения.

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0 \Rightarrow$$

$$\cos(2(x/2)) + \cos(2(y/2)) + \cos(2(z/2)) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{y}{2} - \sin^2 \frac{y}{2} + \cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \\ & + \left(\cos^2 \frac{y}{2} - \sin^2 \frac{y}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{y}{2} + \sin^2 \frac{y}{2} \right) \\ & + \left(\cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{z}{2} + \sin^2 \frac{z}{2} \right) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{y}{2} - \sin^4 \frac{y}{2} + \cos^4 \frac{z}{2} - \sin^4 \frac{z}{2} = 0 \Rightarrow$$

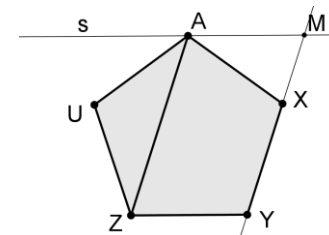
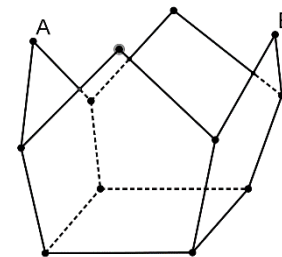
$$\cos^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{y}{2} + \cos^4 \frac{z}{2} = \sin^4 \frac{x}{2} + \sin^4 \frac{y}{2} + \sin^4 \frac{z}{2}.$$

Критерии. Если доказательство начато с утверждения, которое надо доказать, и закончено условием без ссылки на равносильность утверждений: 4 балла.

3. Из четырёх правильных пятиугольников со стороной 1 и квадрата склеили коробку (см. рис.) Найти расстояние между точками A и B.

Ответ: 2.

Набросок решения. Через точку A проведём плоскость, параллельную плоскости квадрата. Из соображений симметрии понятно, что точка B будет лежать в этой плоскости. Рассмотрим пересечение проведённой плоскости с плоскостями, содержащими правильные пятиугольники. Точки пересечения полученных прямых являются вершинами квадрата, поскольку параллельные плоскости пересекаются с третьей по параллельным прямым. Точки A и B будут лежать на противоположных сторонах верхнего квадрата. Осталось заметить, что сторона этого квадрата равна 2, а точки A и B середины сторон этого квадрата. Это



следует из следующего свойства правильного пятиугольника. Пусть $AXYZU$ – правильный пятиугольник, s – прямая, проходящая через точку A параллельно ZY . M – точка пересечения прямых s и XU . Имеет место равенство $ZY=AM$. Это следует из параллельности диагонали AZ и стороны XU , что доказывается счётом углов.

4. Найти наибольшее C такое, что для всех $y \geq 4x > 0$ выполняется неравенство $x^2 + y^2 \geq Cxy$.

Ответ: $17/4$.

Набросок решения. Положим $y=4, x=1$. $1+16 \geq 4C$. $C \leq 17/4$.

Докажем, что при $C=17/4$ и всех $y \geq 4x > 0$ выполняется неравенство $x^2 + y^2 \geq Cxy$. Разделим неравенство на $x^2 > 0$ и введём новую переменную $z=y/x \geq 4$. $z^2 + 1 \geq Cz \Leftrightarrow (z-C/2)^2 + 1 - C^2/4 \geq 0$. При $z \geq C/2$ функция $f(z) = z^2 - Cz + 1 = (z-C/2)^2 + 1 - C^2/4$ возрастает, и значит, из $z \geq 4 \geq C/2$ следует $f(z) \geq f(4) = 0$, что равносильно доказываемому неравенству.

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точка D на стороне AC такова, что радиус вписанной окружности треугольника ABD равен радиусу внеписанной окружности треугольника CBD , касающейся стороны CD . Доказать, что длина этих радиусов составляет четверть длины высоты, опущенной из точки C в треугольнике ABC .

Набросок решения. Пусть M – середина основания AC . Тогда $AB^2 - BD^2 = (AM^2 + BM^2) - (DM^2 + BM^2) = AM^2 - DM^2 = (AM - DM)(AM + DM) = AD \cdot CD$. (1). Пусть h – высота, проведённая из вершины C к стороне AB , r – радиус вписанной в ABD окружности. Имеем $[ABC] = h \cdot AB/2$, $[BAD] = r(AB + BD + AD)/2$, $[BCD] = r(BC + BD - CD)/2 = r(AB + BD - CD)/2$. $AD/CD = [BAD]/[BCD] = (AB + BD + AD)/(AB + BD - CD)$ Отсюда с учётом (1) $AD - CD = 2AD \cdot CD / (AB + BD) = 2(AB - BD)$. Окончательно $h \cdot AB/2 = [ABC] = [BAD] + [BCD] = r(2AB + 2BD + AD - CD)/2 = 2rAB$, значит $r = h/4$.

6. Для натурального числа n $G(n)$ обозначает количество натуральных чисел m , для которых $m+n$ делит mn . Найти $G(10^k)$.

Ответ: $G(10^k) = 2k^2 + 2k$.

Набросок решения. Так как $mn = n(m+n) - n^2$, то если $m+n$ делит mn , то $m+n$ делит n^2 . Поэтому $G(n)$ равно количеству делителей n^2 , которые больше n . Каждому делителю $d > n$ числа n^2 сопоставим делитель $n^2/d < n$, что означает, что количество делителей n^2 , больших чем n , равно количеству делителей n^2 , меньших, чем n . Поэтому $2G(n) + 1$ – это число делителей n^2 . Натуральных делителей у числа 10^{2k} будет $(2k+1)^2$ и поэтому $G(10^k) = 2k^2 + 2k$.