

Муниципальный этап областной олимпиады школьников  
по математике

2020-2021 учебный год

11 класс. Решения и оценивание.

1. Существует ли 2020-значное число (не содержащее цифр 0 и 1), делящееся на сумму своих цифр?

**Ответ.** Да.

**Решение.** Например, таким является число 222...2223333444...4444 (454·4 двоек, 4 тройки, и 50·4 четверки, всего 2020 цифр). Сумма цифр этого числа равна  $454 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 50 \cdot 4 \cdot 4 = 4444$ . Число делится на 1111 (оно составлено из блоков по 4 цифры) и на 4, и, значит, делится на сумму своих цифр.

**Оценивание.** Любое полное решение – 7 баллов. За правильный ответ (без примера) – 0 баллов. За правильный пример, но без обоснования делимости – снять 1-3 балла (в зависимости от сложности обоснования).

2. Шахерезада рассказывает шаху математические сказки. Математическая сказка – это уравнение вида  $ax + by = c$ , где  $a, b, c$  – натуральные числа в пределах от 1 до 17 (включительно). Сказка – печальная, если у соответствующего уравнения нет решений в целых числах (например, сказка  $2x + 4y = 7$  – печальная, а сказка  $3x + 5y = 2$  – нет: у этого уравнения есть решение  $x = -1, y = 1$ ). Сможет ли Шахерезада придумать 1001 различных печальных сказок?

**Ответ:** сможет.

**Решение.** Печальными будут следующие сказки:

а)  $a$  и  $b$  – четные,  $c$  – нечетное. Таких сказок  $8 \cdot 8 - 9 = 576$ .

б)  $a$  и  $b$  делятся на 3,  $c$  – не делится на 3. Таких сказок  $5 \cdot 5 - 12$ . Но надо учесть пересечение с а):  $a$  и  $b$  делятся на 6,  $c$  нечетно, не делится на 3. Таких сказок  $2 \cdot 2 - 6 = 24$ .

Итого а) и б):  $576 + 300 - 24 = 852$

в)  $a$  и  $b$  делятся на 5,  $c$  не делится на 5: таких  $3 \cdot 3 - 14 = 126$ . Однако из них уже посчитаны  $1 \cdot 1 - 7$  в а), и  $1 \cdot 1 - 10$  – в б). Всего новых - 109

г) Сказки вида  $a=b=p, c \neq p$ , где  $p$  – одно из чисел 11, 13, 17. Всего таких  $3 \cdot 16 = 48$ .

Итого, уже есть  $852 + 109 + 48 = 1009$ .

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов. За ошибки, связанные с наложением серий, и арифметические ошибки – снять 1-3 балла, в зависимости от их фатальности

3. Коля и Оля ставят на доску размера  $5 \times 5$  слонов так чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Первым ходит Коля, однако ему запрещено своим первым ходом ставить слона в центр доски. Кто выиграет при наилучших действиях сторон?

**Ответ:** выиграет Коля.

**Решение.** Будем использовать шахматную раскраску доски (центр - черный). Коля может первый ход сделать, например, в клетку с1. В дальнейшем, при ходе Оли в белую клетку, Коля отвечает центрально-симметрично (такой ход будет допустим; положение слонов на белых клетках будет после этого симметричным, что позволит Коле и дальше продолжать использовать «бело-симметричную» стратегию). Ну, а «черных» ходов будет сделано всего 2: на ход с3 Коля ответит с5 (и наоборот), при ходе в угловую клетку – Коля ответит ходом в неугловую клетку на другой «черной» диагонали (и наоборот).

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов. За пробелы в обосновании выигрышной стратегии – снять 1-2 балла. За правильный ответ без обоснования – 0 баллов.

**Замечание.** Возможны и другие выигрывающие стратегии. Однако первый ход в угол – проигрывает.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения  $x\sqrt{4-y^2} + y\sqrt{9-x^2}$ .

**Ответ:** 1 и -1.

**Решение.** Из ОДЗ следует, что  $x$  по модулю не превышает 3, а  $y$  – по модулю – не превышает 2.

Поэтому  $x = 3\sin\alpha, y = 2\sin\beta$  для некоторых углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Но тогда все выражение равно (по формуле для синуса суммы)  $6\sin(\alpha + \beta)$ , и, значит, не превышает (по модулю) 6. Равенство достигается при  $y=0$  и  $x=3$  ( $x=-3$ ).

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов. Возможны и прямые решения – их, конечно, следует засчитывать.

5. В треугольнике ABC (угол B - тупой) провели высоту ВН и биссектрису АК. Найдите угол АКВ, если угол КНС равен  $45^\circ$ .

**Ответ:**  $45^\circ$ .

**Решение.** Точка К равноудалена от прямых АВ и АС (так как АК - биссектриса), и от прямых НВ и НС (т.к. НК – биссектриса прямого угла). Поэтому точка К равноудалена от прямых АВ и ВН. Значит, ВК – биссектриса угла, внешнего к углу АВН. Поэтому угол НВС равен половине этого внешнего угла:  $90^\circ - C = \frac{1}{2}(A + 90^\circ)$ , откуда  $C + \frac{1}{2}A = 45^\circ$ . Но это как раз и есть искомый угол АКВ (он – внешний в треугольнике АКС).

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов. За «тригонометрическое» решение – полный балл. За правильно составленное, но не решенное уравнение – 2 балла. За правильный ответ (без решения) – 0 баллов.