11 класс – 2020

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в ***комментариях*** к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

11.1. Докажите, что найдутся не менее 2020 различных целых положительных чисел n, что число $n+0,25$ является квадратом некоторого рационального числа.

Доказательство. Достаточно заметить, что для любого целого положительного числа m число $n = m^2 + m$ будет удовлетворять условию задачи: $n + 0,25 = m^2 + m + 0,25 = (m + ½)^2$.

11.2. Докажите, что если сумма попарно различных положительных чисел x, y, z, t равна 1, то хотя бы одно из чисел $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $\sqrt{x}+\sqrt{z}$, $\sqrt{x}+t$, $\sqrt{y}+\sqrt{z}$, $\sqrt{y}+\sqrt{t}$, $\sqrt{z}+\sqrt{t}$ больше 1 .

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $x>y>z>t$. Достаточно проверить, что $\sqrt{x}+\sqrt{y}>1$ при выполнении условий $1>x>\frac{1}{4}$ и $x>y>\frac{1-x}{3}>0$. Проверка: $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1-x}{3}}>1$

$$\Leftrightarrow\quad x+\frac{1-x}{3}+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{3}}>1 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{3}}>\frac{2-2x}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x(1-x)>\frac{(1-x)^2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x>\frac{1-x}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x>\frac{1}{4}.$$

11.3. Докажите, что дробь $\frac{m(n+1)+1}{m(n+1)-n}$ несократима для всех натуральных значений n и m .

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда разность между числителем и знаменателем, равная $n + 1$, делится на их общий делитель $d > 1$. Тогда $1 = (m(n + 1) + 1) - m(n + 1)$ делится на d . Противоречие.

11.4. В выпуклом четырёхугольнике ABCT AB = BC и AT = TC . На диагонали BT отмечена точка P. Прямая, проходящая через P параллельно BC , пересекает прямую AT в точке M . Прямая, проходящая через P параллельно CT , пересекает прямую AB в точке K . Докажите, что треугольники PTK и PBM имеют равные площади.

Доказательство. Пусть O – точка пересечения AB и TC . Отметим на прямой TC такую точку M_1 , что PM_1 параллельно KO . Отметим на AB такую точку H , что HM параллельно BT . Так как треугольники ABT и CBT симметричны, то MHBP – равнобедренная трапеция, $PKOM_1$ – параллелограмм, а точки M_1 и M симметричны относительно BT . Поэтому $BH = PM = PM_1 = KO$ и $S_{PTK} : S_{PBM} = (PT : PB) \cdot (KB : HB) = (PT : PB) \cdot (KB : KO) = 1$.

11.5 Числа 1, 2, 3, … , 46 разбиты на три группы. Докажите, что хотя бы в одной из групп найдутся два числа, разность которых равна квадрату некоторого целого числа.

Доказательство. Предположим, что в каждой группе разность любых двух чисел не равна точному квадрату, т.е. не равна числам 1, 4, 9, 16, 25, 36. Рассмотрим набор чисел 1, 10, 26, 17, 35, 19. При данном предположении эти числа единственным образом разделяются на три группы {1, 35}, {10, 17}, {19, 26}. Аналогично, получаем другие пары {2, 36}, {11, 18}, {20, 27}, {3, 37}, {12, 19}, {21, 28}, {4, 38}, {13, 20}, {22, 29}, {5, 39}, {14, 21}, {23, 30}, {6, 40}, {15, 22}, {24, 31}, {7, 41}, {16, 23}, {25, 32}, {8, 42}, {17, 24}, {26, 33}, {9, 43}, {18, 25}, {27, 34}, {10, 44}, {28, 35}, {11, 45}, {29, 36}, {12, 46}, {30, 37}. Тогда в одну группу входят числа {1, 35, 28, 21, 14}, в другую – числа {10, 17, 24, 31, 44}, в третью – {19, 26, 33, 12, 46}. Так как число 20 не может быть в одной группе с числами 19 и 21, то оно во второй группе. Но тогда 24 – 20 = 4 – точный квадрат. Противоречие.