Всероссийская олимпиада школьников 2020/2021 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
11 класс

Общее время выполнения работы – 4 часа 00 мин (240 минут).
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.
При наличии дополнительных критериев решение школьника оценивается в соответствии с ними.

Задание 11.1
Существует ли такая функция $f(x)$, определённая для всех действительных чисел, что $f(\sin x) + f(\cos x) = \sin x$?
Количество баллов 7
Ответ:
Не существует
Решение
Пусть такая функция существует.
Тогда $f(\sin 0) + f(\cos 0) = \sin 0$, то есть $f(0) + f(1) = 0$.
Но $f(\sin {}^{\pi}/_{2}) + f(\cos {}^{\pi}/_{2}) = \sin {}^{\pi}/_{2}$, то есть $f(0) + f(1) = 1$. Противоречие.

Задание 11.2
В каждую клетку квадратной таблицы $2021 \cdot 2021$ вписано произвольным образом одно из чисел 1 или -1. Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце. Справа от каждой строки пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сумма 4042 написанных произведений не может оказаться равной нулю.
Количество баллов 7
Решение

Найдем произведение всех 2021 чисел, записанных под каждым столбцом и всех 2021 чисел, записанных справа от строчек. Так как в этом произведении каждое из чисел квадратной таблицы входит по два раза, то произведение этих 4042 произведений, в каждом из которых стоит по 2021 множителю, будет положительным, т. е. равно 1. А так как произведение 4042 чисел положительно, то отрицательных сомножителей будет четное число. Сумма же 4042 произведений может быть нулем лишь в случае, когда 2021 слагаемое равно 1, а 2021 слагаемое равно - 1, т. е. слагаемых с - 1 должно быть нечетное число. А это значит, что сумма 4042 написанных произведений не может равняться нулю.

Задание 11.3
В вершинах семнадцатиугольника записали различные целые числа (по одному в каждой вершине). Затем все числа одновременно заменили на новые: каждое заменили на разность двух следующих за ним по часовой стрелке чисел (из соседнего вычитали следующее за ним). Могло ли произведение полученных чисел оказаться нечетным?
Количество баллов 7
Ответ:
Не могло.
Решение. Пусть первоначально в вершинах семнадцатиугольника записаны числа: a_1, a_2, …, a_{17} (нумерация – по часовой стрелке). Тогда после указанной замены в вершинах будут записаны числа: $a_2 - a_3$, $a_3 - a_4$, …, $a_{16} - a_{17}$, $a_{17} - a_1$, $a_1 - a_2$.
Заметим, что сумма полученных семнадцати чисел равна 0. Следовательно, хотя бы одно из этих чисел – четное. Значит, их произведение также четное.
Дополнительные критерии проверки
“7” *Приведено полное обоснованное решение*
“2-3” *Присутствует только верная идея сложения новых чисел, не доведенная до конца*
“0” *Приведен только ответ*
“0” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

Задание 11.4
Две окружности пересекаются в точках A и B. Оказалось, что радиусы OA и OB первой окружности являются касательными ко второй окружности. Через точку A проведена прямая, которая вторично пересекает окружности в точках M и N. Докажите, что $MB \perp NB$.
Количество баллов 7
Решение
Пусть $\angle BMN = \propto$, $\angle BNM = \beta$ (см. рис. а, б).

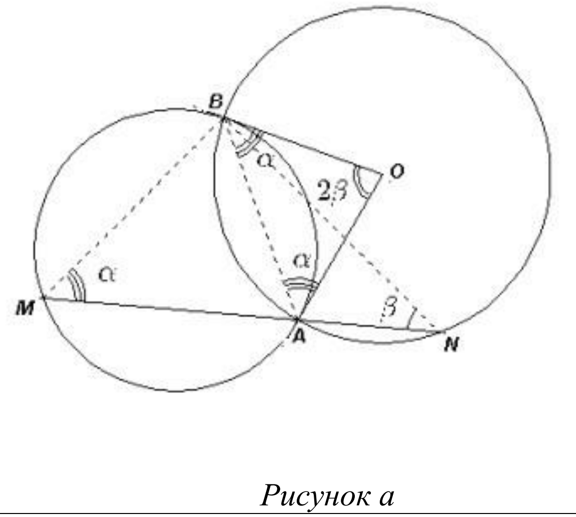

Рисунок а

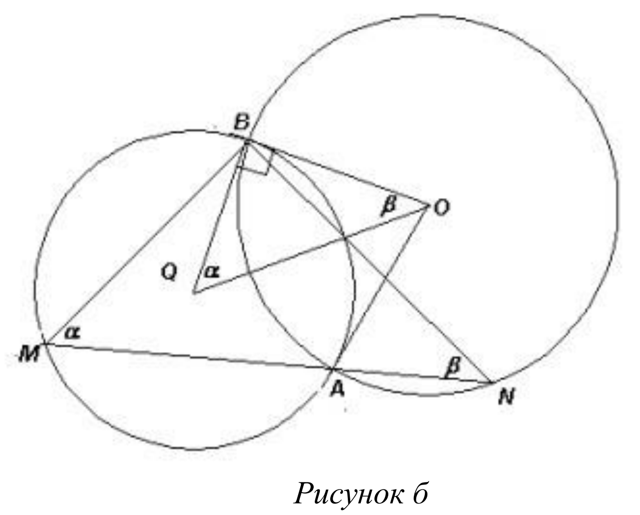

Рисунок б

Первый способ.
См. рис. а. Заметим, что $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$ (по теореме об угле между касательной и хордой), $\angle AOB = 2\beta$ (центральный угол). Из треугольника AOB: $2\alpha + 2\beta = 180°$, значит $\alpha + \beta = 90°$. Следовательно, $\angle MBN = 90°$, что и требовалось.
Второй способ.
См. рис. б. Пусть Q – центр второй окружности, тогда $\angle OQB = 1/2\ \angle AQB = \alpha$, $\angle QOB = 1/2\ \angle AOB = \beta$. Следовательно, треугольники QBO и MBN подобны. Но $\angle QBO = 90°$ (перпендикулярность касательной и радиуса), значит, $\angle MBN = 90°$, что и требовалось.
Замечание
Существуют и другие способы рассуждений, например, можно использовать, что четырехугольник OAQB – вписанный (см. рис. б).
Дополнительные критерии проверки
“7” *Приведено полное обоснованное решение*
“5-6” *Приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
“0” *Приведено неверное решение или оно отсутствует*

Задание 11.5
Доказать, что для любого натурального n

$$\frac{1}{3+1^2}+\frac{1}{3+2^2}+\frac{1}{3+3^2}+...+\frac{1}{3+n^2}<\frac{4}{5}$$

Количество баллов 7
Решение
Для доказательства усилим неравенство:

$$\frac{1}{3+1^2}+\frac{1}{3+2^2}+\frac{1}{3+3^2}+...+\frac{1}{3+n^2}\le\frac{4}{5}-\frac{2}{2n+1}$$

Теперь можно применить метод математической индукции
Проверим для $n = 1$

$\frac{1}{4}\le\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$ – неверно.

Проверим для $n = 2$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\le\frac{4}{5}-\frac{2}{5}$ – верно.

Поэтому индукционные рассуждения начинаем с $n = 2$.
Пусть для $n = k$ верно, т.е.

$$\frac{1}{3+1^2}+\frac{1}{3+2^2}+\frac{1}{3+3^2}+...+\frac{1}{3+k^2}\le\frac{4}{5}-\frac{2}{2k+1}$$

Прибавим к обеим частям $\frac{1}{3+(k+1)^2}$, получим

$$\frac{1}{3+1^2}+\frac{1}{3+2^2}+\frac{1}{3+3^2}+...+\frac{1}{3+k^2}+\frac{1}{3+(k+1)^2}\le\frac{4}{5}-\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{3+(k+1)^2}$$

Рассмотрим разность

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{3+(k+1)^2}-\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{2k+3}\right)=\frac{1}{3+(k+1)^2}-\left(\frac{2}{2k+1}-\frac{2}{2k+3}\right)=$$

$$==\frac{1}{3+(k+1)^2}-\frac{4}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{3+(k+1)^2}-\frac{4}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{1}{3+(k+1)^2}-\frac{1}{(k+1)^2-\frac{1}{4}}<0$$

Поэтому усиленное неравенство верно для $n \geq 2$, а значит для этих n верно и исходное.
Проверим для $n = 1$

$$\frac{1}{3+1^2} < \frac{4}{5}$$

Что очевидно верно.

Замечание

Попытка применить метод математической индукции к исходному неравенству оказывается неудачной, так как не получается выполнить индукционный переход и такая попытка оценивается в «0» баллов.