11 класс

1. Решение

Нужно доказать, что выражение $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ делится на 9 при любом натуральном $n.$

Доказательство проведем методом математической индукции.

База индукции: при n=1 получаем число 36 и оно делится на 9.

Индукционный шаг. Докажем теорему: Если выражение $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ делится на 9, то выражение $(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3$ делится на 9.

Для этого преобразуем выражение

$$(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3=(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3)+9\times(n^2+3n+3)$$

Первое слагаемое делится на 9 по условию теоремы и второе слагаемое делится на 9. Значит, их сумма делится на 9.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Приведение отдельных примеров оценивается в 0 баллов.

Неточность в осуществлении метода математической индукции (например, не записана теорема индукционного шага) – снимается 1 балл.

2. Ответ:Например, $b_n=n+\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$.

Решение.Вычтем из элементов данной последовательности числа натурального ряда соответственно. Перепишем данную последовательность в виде 1;0;-1;0;1;0 и т.д. Получим последовательность значений функции $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$. Возвращаясь к исходному ряду, получаем ответ.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Верное решение - 7 баллов. Из последовательности выделен ряд натуральных чисел - 2 балла.

3. Ответ: Отношение производительности третьей линии к производительности второй линии $\frac{7}{8}$.

Решение. Пусть производительность первой линии - n_1 продукции в час, второй - n_2, третьей - n_3. Каждая из линий работает T часов в сутки.

Из условия задачи получаем систему трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases}(n_1+n_3)\left(T-4\frac{4}{5}\right)=n_1T,\\ n_2(T-2)=n_1T,\\ n_3=\frac{1}{2}(n_1+n_2).\end{cases}$$

Поделим каждое уравнение системы на n_1

$$\begin{cases}\left(\frac{n_2}{n_1}+\frac{n_3}{n_1}\right)\left(T-4\frac{4}{5}\right)=T,\\ \frac{n_2}{n_1}T-2\frac{n_2}{n_1}=T,\\ \frac{n_3}{n_1}=\frac{1}{2}\frac{n_2}{n_1}+\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Из системы получим квадратное уравнение относительно T: $5T^2-43T+24=0$.Получим T=8, затем находим отношение $\frac{n_3}{n_2}=\frac{7}{8}$.

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Верное решение - 7 баллов. Верно построена математическая модель (система)-1 балл, Найдено значение T - 4 балла. Недостаточное обоснование задачи или имеются математические неточности в рассуждениях 4-5 баллов. Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки - 6 баллов.

4. Ответ: 900

Решение

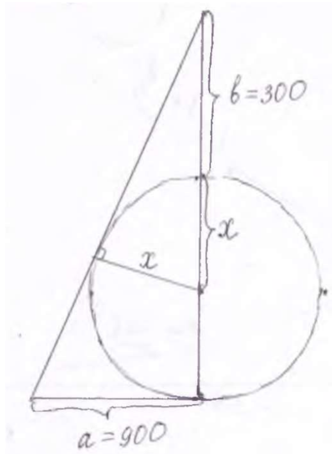


Рис. 2.

Из подобия треугольников (рис. 2) получаем уравнение

$$\frac{b+x}{\sqrt{(b+x)^2-x^2}+a}=\frac{x}{a}$$

$$ab=x\sqrt{b^2+2bx}$$

Обозначим $y=2x$.

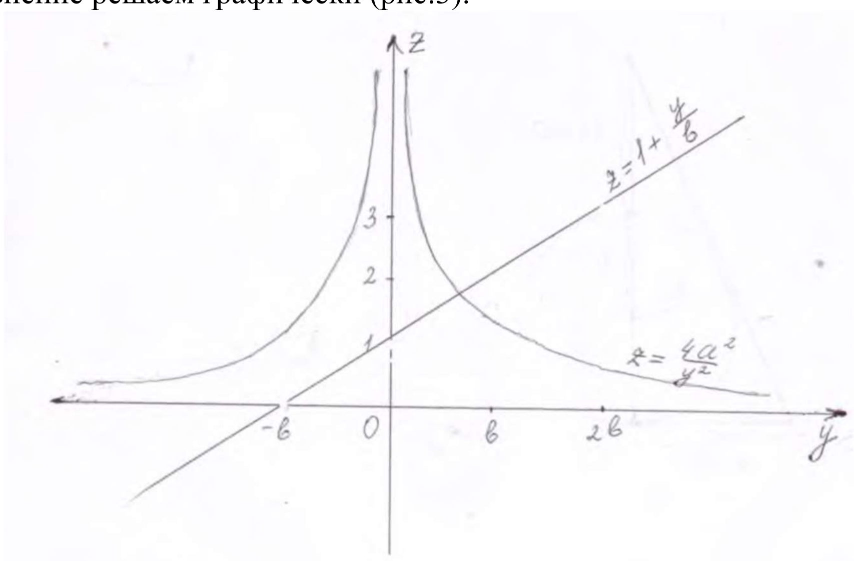
$$2a\sqrt{b}=y\sqrt{b+y}$$

$$\sqrt{1+\frac{y}{b}}=\frac{2a}{y}$$

При условии $\frac{2a}{y}\geq 0$, которое выполнено по условию задачи, получаем

$$1+\frac{y}{b}=\frac{4a^2}{y^2}$$

Далее это уравнение решаем графически (рис.3).



$z=1+\frac{y}{b}$

y	-b	0	b	2b	3b	4b	5b
z	0	1	2	3	4	5	6

$z=\frac{4a^2}{y^2}$

y	1	b	2b	3b	4b	5b
z	$4a^2$	$\frac{4a^2}{b^2}$	$\frac{a^2}{b^2}$	$\frac{4a^2}{9b^2}$	$\frac{4a^2}{16b^2}$	$\frac{4a^2}{25b^2}$

Рис. 3.

С помощью графика показано, что при $y \geq 0$ уравнение имеет единственное решение.
Далее подбираем это решение и получаем, что $y = 3b$, то есть 900.
Подобрать решение можно так.
Пусть $y = kb$, тогда имеем уравнение

$$\frac{4a^2}{(kb)^2} = k + 1$$
$$\frac{4 \times 900^2}{k^2 \times 300^2} = k + 1$$
$$\frac{36}{k^2} = k + 1$$
$$k^3 + k^2 = 36$$
$$k^2 \times (k + 1) = 3^2 \times (3 + 1)$$
$$k = 3$$

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

По задаче верно составлено уравнение, приводящее к решению задачи, и это уравнение не решено – 2 балла.
Не обоснованы отдельные шаги в решении уравнения и при этом уравнение решено верно – 6 баллов.
При решении уравнения методом подбора не доказано, что найденное решение единственное – 3 балла.
При реализации графического метода решения уравнения построены графики, но само решение уравнения не найдено – 3 балла, при этом в тексте решения указано, что решение уравнения единственное – 4 балла.
Верное и полное решениие - 7 баллов.
Обозначение a и b в изложенном решении использованы для удобства ведения записей. За отсутствие подобных обозначений в решении баллы не снимаются.

5. Ответ: косинус искомого угла равен $\frac{tg54° \times (1 - 2sin54°)}{\sqrt{4 - (2sin54° - 1)^2}}$

Решение

Обозначения показаны на рисунке 4. x - расстояние между ребром CD и проекцией отрезка AB на плоскость пятиугольника, выбранного основанием.Пусть ребро додекаэдра равно 1.

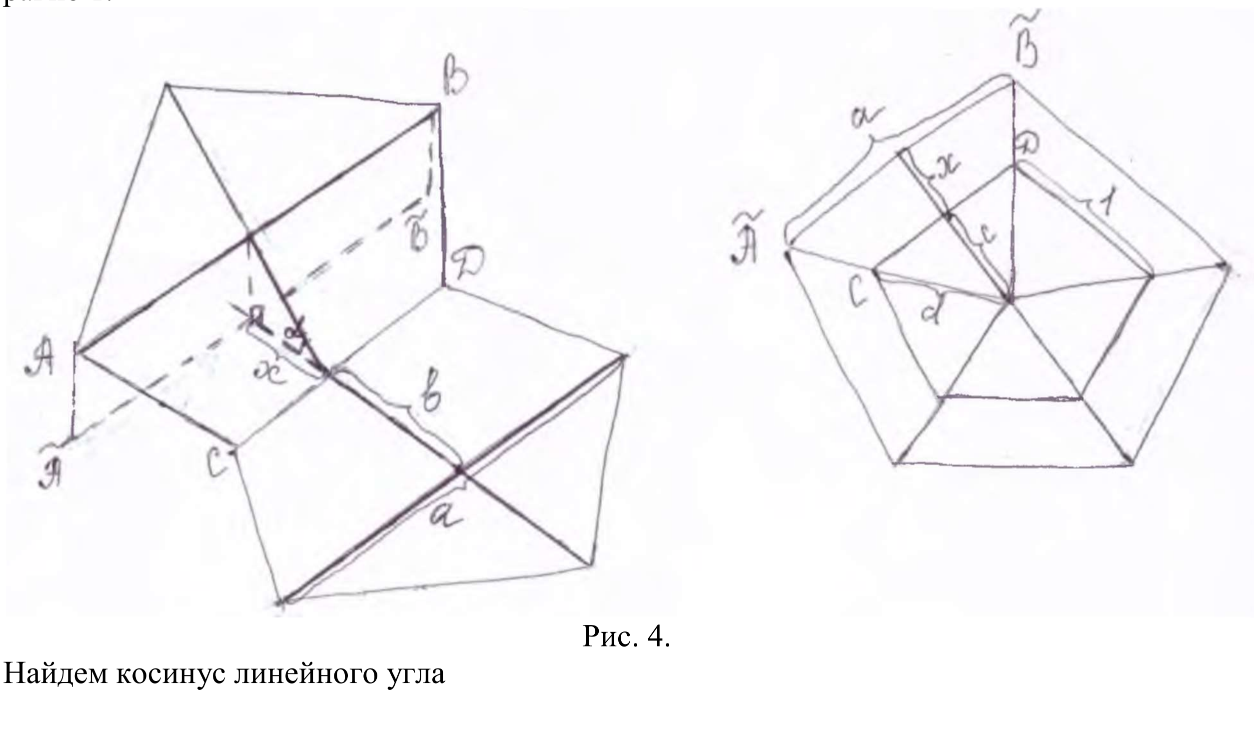


Рис. 4.

Найдем косинус линейного угла

$$cos\alpha = \frac{x}{b}$$

По теореме косинусов

$$a^2 = 1 + 1 - 2cos108°$$
$$a = 2sin54°$$

По теореме Пифагора

$$b^2 = 1 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$
$$b = \frac{1}{2}\sqrt{4 - (2sin54° - 1)^2}$$

По теореме косинусов

$$1 = d^2 + d^2 - 2d^2cos72°$$
$$1 = 2dsin36°$$
$$d = \frac{1}{2sin36°}$$

По теоремеПифагора

$$c^2 = d^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$c = \frac{1}{2}ctg36° = \frac{1}{2}tg54°$$

Изподобиятреугольников

$$\frac{c + x}{c} = \frac{a}{1}$$
$$x = c \times (a - 1)$$

Подставляем c и a и получаем

$$x = \frac{1}{2}tg54° \times (2sin54° - 1)$$

Таким образом, получаем

$$cos\alpha = \frac{x}{b} = \frac{tg54° \times (2sin54° - 1)}{\sqrt{4 - (2sin54° - 1)^2}}$$

Искомый угол равен $(180° - \alpha)$.

$$cos(180° - \alpha) = -\,cos\alpha = \frac{tg54° \times (1 - 2sin54°)}{\sqrt{4 - (2sin54° - 1)^2}}$$

Критерии оценивания (0 -7 баллов)

Решение в геометрической части задачи верное и доведено до конца, но допущена вычислительная ошибка – 5 баллов.

Решение в геометрической части задачи верное и доведено до конца, но допущена ошибка в тригонометрической формуле – 3 балла.

Решение доведено до конца, но есть ошибка с геометрией (например, с расположением отрезков), которая привела к неверному ответу – 1 балл.

Выбран ход решения, который не приводит к нахождению требуемого угла, - 0 баллов.

В ответе указан косинус острого угла – баллы не снижаются.

Решение верное, но перед применением геометрической теоремы (например, теоремы косинусов) отсутствует указание на нее – 6 баллов.