Решения задач
11 класс

1. Пусть $S(n)$ обозначает количество попаданий в мишень стрелка при n выстрелах. В начале стрельбы $S(n)$ составляло менее 90% от n, а к концу стрельбы – более 90%. Обязательно ли во время стрельбы был момент, когда $S(n)$ составляло ровно 90% от n?

Решение.
Предположим, что такого момента не было. Значит, для некоторого n должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{9}{10}, \\ \dfrac{S(n)+1}{n+1} > \dfrac{9}{10}; \end{cases} \Rightarrow 9n - 1 < 10 \cdot S(n) < 9n.$$

Последняя цепочка неравенств не может выполняться ни при каких n и $S(n)$, так как между двумя последовательными целыми числами нельзя вставить целое число.
Ответ: обязательно.

Замечания по проверке. Рассмотрены только частные случаи – 0 баллов.

2. Вини-Пух запасся на зиму шоколадными батончиками: 60% от общего их числа составляли батончики «Сникерс», 30% – «Марс» и 10% – «Баунти». Весной оказалось, что количество съеденных Вини-Пухом «Баунти» составило 120% от количества съеденных батончиков «Марс» и 30% от числа съеденных «Сникерсов». Сколько всего батончиков запас на зиму Вини-Пух, если несъеденными остались 2/3 всех «Баунти» и не более 150 «Сникерсов».

Решение.
Пусть всего было $3k$ батончиков «Баунти». Тогда было $9k$ батончиков «Марс» и $18k$ «Сникерсов». Так как съедено было k батончиков «Баунти», батончиков «Марс» было съедено $\dfrac{k}{1{,}2} = \dfrac{5k}{6}$ штук. Поэтому k делится на 6. «Сникерсов» было съедено $\dfrac{k}{0{,}3} = \dfrac{10k}{3}$, а осталось $18k - \dfrac{10k}{3} = \dfrac{44k}{3} \le 150$ штук. Значит, $k \le \dfrac{450}{44} = 10\dfrac{5}{22}$. Следовательно, поскольку k делится на 6, $k = 6$. Всего батончиков было $18k + 9k + 3k = 30k = 180$.
Ответ: 180.

Замечания по проверке. Угадан ответ без обоснования – 0 баллов.

3. Найти все значения параметра a, при которых в интервале $(3a;\ 5a-2)$ содержится хотя бы одно целое число.

Решение.
Левый конец интервала должен быть меньше правого, поэтому $3a < 5a - 2 \Rightarrow a > 1$. Далее, если длина интервала больше единицы, он заведомо содержит целое число. $5a - 2 - 3a > 1 \Rightarrow a > 1{,}5$. Таким образом, интервал $(1{,}5;\ \infty)$ входит в множество решений задачи. Рассмотрим значения $a \in (1;\ 1{,}5]$. Для них будут справедливы неравенства: $3 < 3a < 5a - 2 \le 5{,}5$. Следовательно, целыми числами, которые могут попасть в интервал, будут 4 и 5. Поэтому должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 1 < a \le 1{,}5, \\ 3a < 4, \\ 5a - 2 > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a \le 1{,}5, \\ a < 4/3, \\ a > 1{,}2; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (1{,}2;\ 4/3);$$

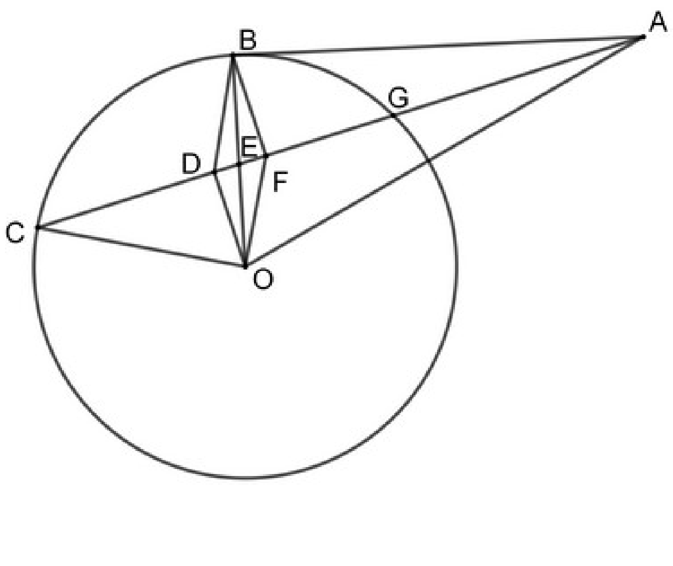
$$\begin{cases} 1 < a \le 1{,}5, \\ 3a < 5, \\ 5a - 2 > 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a \le 1{,}5, \\ a < 5/3, \\ a > 1{,}4; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (1{,}4;\ 1{,}5].$$

Объединяя найденные множества, получаем: $a \in (1{,}2;\ 4/3) \cup (1{,}4;\ +\infty)$.
Ответ: $(1{,}2;\ 4/3) \cup (1{,}4;\ +\infty)$.

Замечания по проверке. Не рассмотрены точки 4 и 5 – 1 балл, рассмотрена одна из указанных точек – 2 балла.

4. Дана окружность радиуса R. На расстоянии $2R$ от центра окружности выбрана точка A. Из этой точки проведены касательная и секущая, причем секущая равноудалена от центра окружности и от точки касания. Найти длину отрезка секущей, заключенного внутри круга.

Решение.



Пусть O – центр окружности, B – точка касания, CG – секущая, BF и OD перпендикулярны секущей, E – точка пересечения секущей с радиусом OB. Отрезки OD и BF равны и параллельны, значит, $ODBF$ – параллелограмм и $OE = BE = \dfrac{R}{2}$. Обозначив через α угол DOE, получаем:

$OD = \frac{R}{2}\cos\alpha,\ CG = 2CD = 2\sqrt{OC^2 - OD^2} = R\sqrt{4-\cos^2\alpha}.$

Стороны углов *BAE* и *DOE* попарно перпендикулярны, поэтому угол *BAE* также равен α. Из прямоугольного треугольника *BAE* находим:

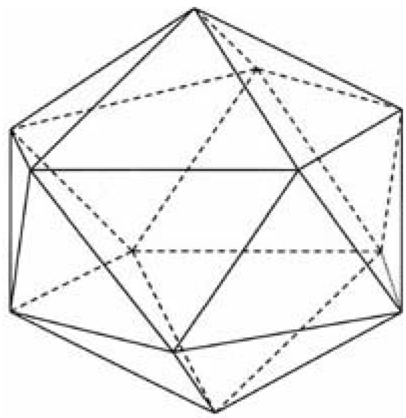
$$tg\alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{\sqrt{OA^2 - OB^2}} = \frac{R}{2\sqrt{4R^2 - R^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{12}{13},\quad CG = R\sqrt{4-\frac{12}{13}} = 2R\sqrt{\frac{10}{13}}.$$

Ответ: $2R\sqrt{\frac{10}{13}}.$

Замечания по проверке. Доказано, что *ODBF* – параллелограмм и установлено равенство углов *BAE* и *DOE* – 2 балла.

5. На каждой грани правильного икосаэдра написано целое неотрицательное число так, что сумма всех 20 чисел равна 39. Доказать, что существуют две различные грани, имеющие общую вершину, и на которых написаны одинаковые числа.



Икосаэдр – это выпуклый многогранник, имеющий 12 вершин, 20 граней и 30 ребер, а все грани есть одинаковые равносторонние треугольники. В каждой вершине икосаэдра сходятся 5 ребер.

Решение.

Предположим, что двух граней с общей вершиной и равными числами не найдется. Пронумеруем вершины от 1 до 12, и пусть суммы чисел на гранях, сходящихся в вершине с номером *k*, равны S_k (в каждой вершине сходятся 5 граней). Тогда, так как числа на гранях считаются по 3 раза (с каждой из трех вершин), $S_1 + S_2 + \cdots + S_{12} = 39\cdot 3 = 117.$ $\frac{117}{12} < 10.$ Следовательно, найдется $S_k < 10,$ что невозможно, так как сумма пяти различных целых неотрицательных чисел не меньше $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.