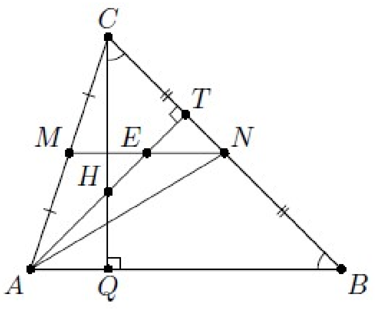
11 класс

1. Корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$равны sin 42º и sin 48º. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$.
   Решение. Обозначим $x_1 = sin$ 42º и $x_2 = sin$ 48º . Так как sin 48º = cos 42º, то $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
   По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
   Тогда $b^2 = (-(x_1 + x_2) \cdot a)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) \cdot a^2 = (1 + 2x_1x_2) \cdot a^2$
   и $a^2 + 2ac = a^2 + 2a(x_1x_2 \cdot a) = a^2 \cdot (1 + 2x_1x_2)$,
   значит $b^2 = a^2 + 2ac$, что и требовалось доказать.

2. Вдоль кругового шоссе построено 30 домов высотой 1, 2, 3, . . . , 30 этажей (ровно по одному дому каждой высоты). Назовем дом интересным, если он выше одного из соседних с ним домов, но ниже другого. Оказалось, что среди этих домов ровно 10 интересных. Докажите, что суммарная высота интересных домов не может быть равна 64 этажам.
   Решение. Одноэтажный дом не может быть интересным.
   Тогда наименьшая суммарная высота интересных домов равна 2 + 3 + … + 11 = 65 > 64.
   То есть не может быть равна 64.

3. Дана возрастающая положительная геометрическая прогрессия b_n.
   Известно, что $b_4 + b_3 - b_2 - b_1 = 5$. Докажите, что $b_6 + b_5 \geq 20$.
   Решение. Пусть $b_2 = b_1q$, так как прогрессия возрастает, то $q > 1$.
   Заметим, что $b_3 + b_4 = b_1q^2 + b_2q^2 = (b_1 + b_2)q^2$ и $b_5 + b_6 = b_3q^2 + b_4q^2 = (b_3 + b_4)q^2$
   То есть числа $(b_1 + b_2), (b_3 + b_4), (b_5 + b_6)$образуют геометрическую прогрессию.
   Тогда условие можно переформулировать так: имеется возрастающая положительная геометрическая прогрессия c_n и $c_2 - c_1 = 5$, нужно доказать, что $c_3 \geq 20$.
   Пусть $c_2 = c_1d$.
   $c_2 = 5 + c_1, c_1d = 5 + c_1, d = \frac{5+c_1}{c_1} = \frac{5}{c_1} + 1$
   $c_3 = c_2d = (c_1 + 5)d = (c_1 + 5)\left(\frac{5}{c_1} + 1\right) = 5 + \frac{25}{c_1} + c_1 + 5 \geq 20$, так как $\frac{25}{c_1} + c_1 \geq 2\sqrt{\left(\frac{25}{c_1} \cdot c_1\right)} = 10$.

4. В треугольнике *ABC* точки *M* и *N* – середины сторон *AC* и *BC* соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника *AMN* является точкой пересечения высот треугольника *ABC*. Найдите угол *ABC*.
   Ответ: 45º.
   Решение. Треугольники *ETN* и *ATB* подобны, следовательно, *TN* : *TB* = *TE* : *TA* = *EN* : *AB* = 1 : 4. Следовательно, *CT* = ½ *BT*.
   Поскольку *H* – точка пересечения медиан треугольника *AMN*, *EH* = ⅓ *AE* = *ET*. Следовательно, *HT* = ½ *AT*.
   Значит, прямоугольные треугольники *CTH* и *BTA* подобны, и □*TCH* = □*TBA*. Но *CH* – часть высоты *CQ* треугольника *ABC*, поэтому эти равные углы являются острыми углами прямоугольного треугольника *CQB*.



5. Докажите, что число $\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right] + \left[\sqrt{n}\right]$чётно при любом натуральном *n*. ([*x*] – целая часть *x*, то есть наибольшее целое, не превосходящее *x*.)
   Решение. Обозначим $S(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right]$ и $F(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right] + \left[\sqrt{n}\right]$
   Найдем разность *S*(*n*+1) – S(*n*).
   Для этого посмотрим на разность $\left[\frac{n+1}{k}\right] - \left[\frac{n}{k}\right]$. Пусть *r* – остаток от деления *n* на *k*.
   Тогда *n* = *kd* + *r*, где *d* – целое.

$\left[\frac{n}{k}\right] = \left[\frac{kd+}{k}\right] = \left[d + \frac{r}{k}\right] = d$, $\left[\frac{n+1}{k}\right] = \left[\frac{dk+r+1}{k}\right] = \left[d + \frac{r+1}{k}\right] = d + \left[\frac{r+1}{k}\right]$

Так как $r < k$, то $\left[\frac{r+1}{k}\right] = 1$ только если $r = k - 1$, а в остальных случаях равно 0.

Но если $r = k - 1$, то $n + 1 = dk + k$ – делится на k.

Это значит, что $S(n+1) - S(n)$ = количество делителей числа $n + 1$.

Теперь заметим, что $\left[\sqrt{n+1}\right] - \left[\sqrt{n}\right] = 1$только если $(n + 1)$ – полный квадрат, а в остальных случаях разность равна 0. Это верно, так как тогда $a^2 \leq n < (n+1) < (a+1)^2$, $a \leq \sqrt{n} < \sqrt{n+1} < a + 1$, $\left[\sqrt{n}\right] = \left[\sqrt{n+1}\right] = a$.

Тогда разность $F(n+1) - F(n)$ равна количеству делителей числа $(n+1)$, если $(n+1)$ не является полным квадратом, и равна количеству делителей числа $(n+1)$ плюс 1, если $(n+1)$ является полным квадратом.

Так как количество делителей числа нечетно тогда и только тогда, когда число является квадратом, то разность $F(n+1) - F(n)$ всегда четна.

Так как $F(1) = 2$, то $F(n)$ – четно при любом n.