11-й класс

11.1 Если последовательность различных чисел x_1, x_2, x_3 из интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ такова, что числа $\sin x_1, \sin x_2, \sin x_3$ образуют арифметическую прогрессию, то сами числа x_1, x_2, x_3 арифметическую прогрессию не образуют. Докажите это.

Решение. Например, от противного. Предположим, что x_1, x_2, x_3 − арифметическая прогрессия, т.е. $x_1 + x_3 = 2x_2$. Тогда имеем

$$2\sin x_2 = (\text{по условию}) = \sin x_1 + \sin x_3 = (\text{тригонометрическое преобразование суммы в произведение}) =$$

$$= 2\sin\frac{x_1 + x_3}{2}\cos\frac{x_1 - x_3}{2} = 2\sin x_2 \cdot \cos\frac{x_1 - x_3}{2}.$$

Т.е. $\sin x_2\left(1 - \cos\frac{x_1 - x_3}{2}\right) = 0,$ что невозможно для x_1, x_2, x_3 из интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $x_1 \neq x_3$.

11.2 Докажите, что если число $t + \sqrt{2}$ рационально, что число $t^3 + \sqrt{2}$ иррационально.

Решение. По условию $t = r - \sqrt{2}$, где r − рациональное число. Тогда

$$t^3 + \sqrt{2} = (r - \sqrt{2})^3 = r^3 - 3r^2\sqrt{2} + 3r(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 + \sqrt{2} =$$

$$= r^3 + 6r - (3r^2 + 1)\cdot\sqrt{2}.$$

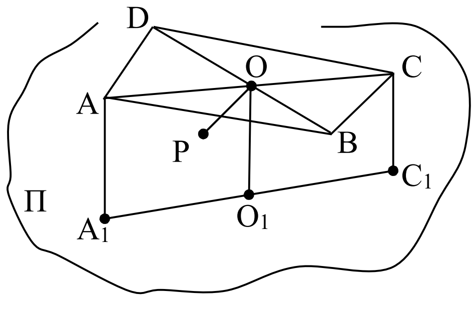
Если бы это число (обозначим его R) оказалось рациональным, то $\sqrt{2}$ оказался бы рациональным числом

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6r - R}{3r^2 + 1},$$

что, как известно, не так.

11.3 Через точку, находящуюся на расстоянии d от центра параллелограмма, проведена плоскость. Докажите, что сумма расстояний от вершин параллелограмма до этой плоскости не превосходит 4d. Плоскость не пересекает параллелограмм.

Решение. См. рис.



$OP = d$. AA_1, OO_1, CC_1 − перпендикуляры к плоскости П, в частности, $OO_1 \le OP = d$. OO_1 − средняя линия в трапеции AA_1C_1C, поэтому

$AA_1 + CC_1 = 2 \cdot OO_1$. Аналогично $BB_1 + DD_1 = 2 \cdot OO_1$. Таким образом $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4 \cdot OO_1 \le 4 \cdot OP = 4d$.

11.4 Докажите, что для чисел a и b, принадлежащих отрезку [0;1], выполняется неравенство $a^5 + b^3 + (a-b)^2 \le 2$.

Решение. Если $x \in [0;1]$, то $x^n \le x$ для любого натурального n. Поэтому $a^5 \le a, b^3 \le b$, $(a-b)^2 = |a-b|^2 \le |a-b|$ (последнее − ввиду того, что $0 \le |a-b| \le 1$). Следовательно,

$$a^5 + b^3 + (a-b)^2 \le a + b + |a-b| = \left[\begin{array}{l} 2a, \text{если } a \ge b, \\ 2b, \text{если } a \le b. \end{array}\right.$$

Поскольку $2a \le 2$ и $2b \le 2$, то требуемое доказано.

11.5 Квадрат со стороной 1 разрезали на прямоугольники, у каждого из которых отметили одну сторону. Докажите, что сумма длин всех отмеченных сторон не меньше 1.

Решение. Обозначим через x_n длину отмеченной стороны n-го прямоугольника, а через y_n − длину другой его стороны, так что $x_n y_n$ − его площадь. Сумма площадей всех прямоугольников равна площади квадрата, т.е. 1:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... = 1.$$

Так как стороны прямоугольников параллельны сторонам квадрата, то их длины ≤ 1: $y_n \le 1$.

Поэтому

$$x_1 + x_1 ... = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + \ge x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... = 1.$$