**11 класс. Решения и критерии**

**1.** Расположите числа от 1 до 101 по кругу так, чтобы соседние числа отличались на 2 или на 5.

Решение. Например,

$$13, 11, 9, 4, 2, 7, 5, 3, 1, 6, 8, 10, 12, \ldots, 92, 94, 96, 101, 99, 97, 95, 100, 98, 93, 91, 89, \ldots, 15, 13$$

Критерии. Если читателю приходится самому догадываться (но это удается), где расположено некоторое число – не более 5 баллов.

**2.** Докажите, что при любом $x$ среди чисел $|\cos x - \sin x|$ и $|\sin x + \cos x|$ найдется число, не меньшее единицы.

Решение. Пусть $a = |\cos x - \sin x| < 1$ и $b = |\sin x + \cos x| < 1$. Тогда $a^2 < 1$ и $b^2 < 1$ и $a^2 + b^2 < 2$. С другой стороны, $a^2 + b^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2$. Полученное противоречие показывает, что предположение «$a < 1$ и $b < 1$» неверно. Значит, либо $a$, либо $b$ не меньше 1.

Критерии. Только проверка конкретных частных случаев – не более 1 балла. Проверка только для $x$ из некоторых (не всех возможных) промежутков – не более 3 баллов.

**3.** В треугольник $ABC$ вписана окружность, точки касания окружности со сторонами треугольника – $M, N$ и $K$. Основания высот треугольника $MNK$ образуют треугольник $PQR$. Докажите, что треугольник $PQR$ подобен треугольнику $ABC$.

Решение. Пусть $M \in BC, N \in CA, K \in AB$ и $P \in KN, Q \in NM, R \in MK$. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle MNC = \angle MKN = \angle PQN$. Следовательно, $PQ || AC$. Аналогично, $PR || AB$ и $QR || BC$. Следовательно, треугольники $ABC$ и $PQR$ подобны.

Критерии. В решении есть утверждение, которое не является общеизвестным и которое читатель не способен сам установить за 5 минут – не более 3 баллов.

**4.** Папа готовит подарки. Он разложил 115 конфет в пакеты, причем все они разные по числу конфет. В трех самых маленьких подарках находится 20 конфет, в трех самых больших – 50. Во сколько пакетов разложены конфеты? Сколько конфет в самом маленьком подарке?

Ответ: 10 пакетов, 5 конфет.

Решение. Пронумеруем подарки от меньшего к большему, от 1 до $n$. Если в третьем 7 или меньше конфет, то в трех меньших подарках не более $7 + 6 + 5 = 18$ конфет. Это противоречит условию. Итак, в третьем подарке не менее 8 конфет. Аналогично, в третьем с конца подарке не более 15 конфет ($16 + 17 + 18 = 51 > 50$).

Уберем три самых больших и три самых маленьких подарка. В оставшихся будет $115 - 20 - 50 = 45$ конфет, причем в каждом от 9 до 14. Трех пакетов явно не хватит ($14 + 13 + 12 = 39$), а пять будет лишнего ($9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55$). Значит, 45 конфет разложено в 4 пакета. Это возможно: $47 = 9 + 11 + 12 + 13$. Заметим, что в четвертом пакете не может быть более 9 конфет: $10 + 11 + 12 + 13 = 46 > 45$).

Если в четвертом пакете 9 конфет, то в третьем не больше 8, во втором – не больше 7, так что в первом пакете – не менее $20 - 8 - 7 = 5$ конфет. Но и не более, так как $6 + 7 + 8 = 21$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только правильные оценки для третьего с начала и третьего с конца пакета – 3 балла. Только обоснованный ответ для числа пакетов – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

**5.** Дан отрезок $AB$. Внутри него расположено несколько других отрезочков. При этом эти несколько отрезочков все вместе покрывают отрезок $AB$. Докажите, что если у каждого отрезочка отбросить одну из половин, левую или правую, то оставшиеся половины будут покрывать не менее $1/3$ длины $AB$.

Решение: Каждую оставшуюся половину отрезочка $s$ «растянем» в три раза (гомотетия с коэффициентом 3 и с центром в середине этой половины). Результат этой гомотетии, очевидно, содержит целый отрезочек $s$. Поэтому «утроения», вместе взятые, заведомо покрывают все исходные отрезочки, а те в свою очередь покрывают $AB$ и тем самым имеют общую длину не меньше длины $AB$. Ну, а суммарная длина втрое меньших половинок тогда не менее трети длины исходного отрезка $AB$.

Критерии. Только частные случаи с конкретным количеством отрезков – не более 1 балла. Доказаны крупные частные случаи (например, когда отбрасываются все время правые половинки отрезочков, а отрезочки произвольные) – до 3 баллов. Общее описание «наихудшего» случая, с получением оценки $1/3$ длины $AB$, но без ясного доказательства, что случай «наихудший» – не более 3 баллов.