

11 класс

11.1. Дано выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$, где x и y – натуральные числа. Если число x увеличить на 4, а число y уменьшить на 4, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy + 4$ – квадрат целого числа.

Решение. По условию $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{y-4} + \frac{1}{(x+4)(y-4)}$, откуда $\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x+4)(y-4)}$. Так как $x+y+1$ положительно, то $xy = (x+4)(y-4)$. Откуда $y = x+4$. Тогда $xy + 4 = x(x+4) + 4 = (x+2)^2$.

Комментарий. Доказано, что $y = x+4$ – 2 балла.

11.2. На доске написано 4 числа. Вася умножил первое из этих чисел на $\sin \alpha$, второе – на $\cos \alpha$, третье – на $\operatorname{tg} \alpha$, четвертое – на $\operatorname{ctg} \alpha$ (для некоторого угла α) и получил набор из тех же 4 чисел (возможно записанных в другом порядке). Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано на доске?

Ответ. 3 числа.

Решение. Докажем сначала, что на доске был записан хотя бы один ноль. Действительно, пусть на доске были записаны ненулевые числа a, b, c, d , тогда их произведение $abcd$ должно равняться произведению новых чисел $abcd \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$. Но из того что $abcd \neq 0$ следует, что $1 = \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, что невозможно. Значит, среди чисел на доске есть 0. Заметим, что $\sin \alpha \cos \alpha \neq 0$ (а, значит, $|\sin \alpha| \neq 1, |\cos \alpha| \neq 1$), в противном случае $\operatorname{tg} \alpha$ или $\operatorname{ctg} \alpha$ был бы не определен. Если среди трех оставшихся чисел нет нуля, то аналогично предыдущему рассуждению, произведение трех тригонометрических функций равно 1. Но $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha \neq 1$, $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \sin \alpha \neq 1$, $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \cos^2 \alpha \neq 1$, $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha = \sin^2 \alpha \neq 1$. Поэтому на доске не меньше двух нулей, то есть различных чисел не больше 3. Ровно три различных числа могли быть, например, в такой ситуации. На доске написаны числа 0, 0, 1 и 2, и они умножались на $\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$ соответственно.

Комментарий. Доказано только, что на доске есть 0 – 1 балл.
Доказано, что на доске не более 3 различных чисел – 5 баллов.
Приведен пример с 3 различными числами – 2 балла.

11.3. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^5 > y^4$ и $y^5 > x^4$. Докажите, что $x^3 > y^2$.

Решение. Докажем, что $x > 1$ и $y > 1$. Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа x и y положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на

положительное число $(xy)^4$, получим: $xy > 1$. Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел x и y больше 1. Пусть, например, $x > 1$. Тогда из неравенства $y^5 > x^4$ следует, что $y^5 > 1$, то есть $y > 1$.

Если $x > y$, то $x^3 > x^2 > y^2$.

Если $1 < x \leq y$, то $x^5 > y^4 \geq x^2 y^2$, откуда $x^3 > y^2$.

Комментарий. Доказано, что $xy > 1$ – 2 балла.

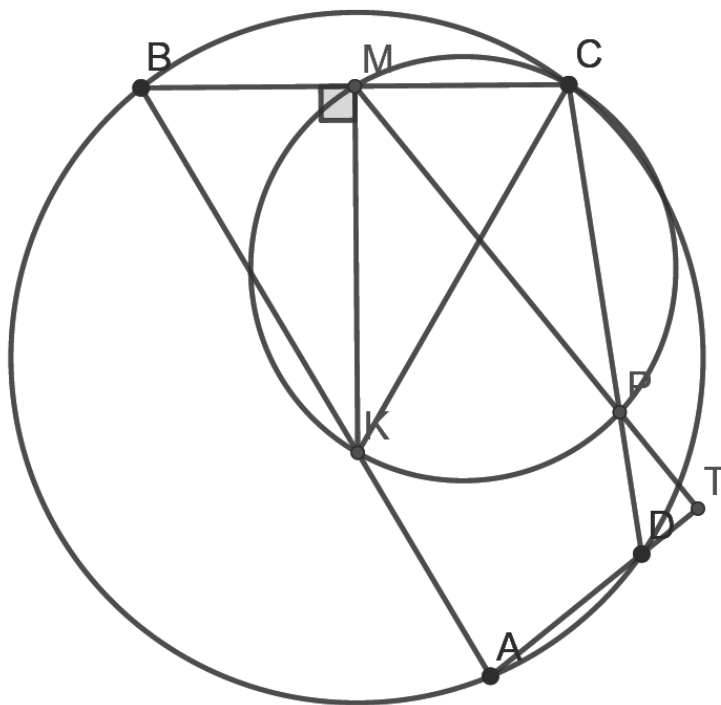
Доказано, что одно из чисел x и y больше 1 – еще 1 балл.

Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

11.4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр к стороне BC , проведенный через ее середину – точку M , пересекает сторону AB в точке K . Окружность с диаметром KC пересекает отрезок CD в точке P ($P \neq C$). Докажите, что прямые MP и AD перпендикулярны.

Решение. Пусть ω – окружность, построенная на KC как на диаметре, тогда точка M лежит на ω , так как угол CMK – прямой. Значит, $\angle CPM = \angle CKM = \alpha$ (они опираются на дугу CM окружности ω). Пусть T – точка пересечения прямых AD и MP . Будем считать, что точка D лежит на отрезке AT . Другой случай разбирается аналогично. Тогда $\angle TPD = \alpha$ (углы TPD и CPM – вертикальные). Значит, для того, чтобы доказать, что прямые AD и MP перпендикулярны, нам нужно доказать, что $\angle PDT + \alpha = \frac{\pi}{2}$, где T – точка пересечения прямых MP и AD .

Но если $\angle PDT = \beta$, то $\angle PDA = \pi - \beta \Rightarrow \angle ABC = \beta$, так как четырехугольник $ABCD$ – вписанный. Наконец, $BK = CK$, так как MK – серединный перпендикуляр к BC . Следовательно, $\angle KCM = \angle KBM = \beta$. А из прямоугольного треугольника KMC получаем $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Утверждение доказано.



Комментарий. Разобран только один случай расположения точки D – баллы не снимаются.

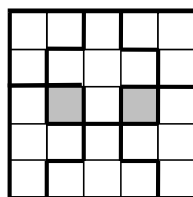
Доказано, что точка M лежит на ω –1 балл.

11.5. В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 5×5 . В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

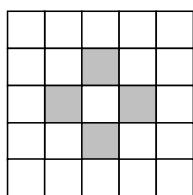
Ответ. 18 рыцарей.

Решение. Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 7 (так мы покажем, что рыцарей не больше 18).

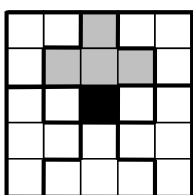
Сначала рассмотрим разбиение комнат на 6 групп (2 комнаты, отмеченные серым, не входят ни в одну из групп). В каждой группе должен быть хотя бы один лжец (иначе у одного из рыцарей группы не будет соседей лжецов). Таким образом, лжецов не меньше 6. Докажем, что их не может быть ровно 6. Предположим противное. Тогда в каждой из выделенных на рисунке групп будет ровно по 1 лжецу. А это значит, что в «серых комнатах» точно будут рыцари.



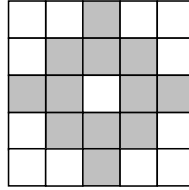
Но если сделать аналогичное разбиение, но повернутое на 90° , мы получим, что еще в двух комнатах должны жить рыцари. Эти 4 комнаты отмечены на рисунке серым. Отсюда следует, что в центральной комнате обязан жить лжец.



Так как в каждой из 6 групп разбиения должен быть ровно 1 лжец, то в комнатах, отмеченных на рисунке серым, должны жить рыцари.



Поворачивая картинку на 90° , мы получим, что рыцари должны жить в комнатах, отмеченных на рисунке серым.



Но тогда в каждой группе из 3 «угловых комнат» должно быть не меньше 2 лжецов. И всего лжецов будет не меньше 9. Получили противоречие. Значит, лжецов не меньше 7.

На рисунке показано, как могли поселиться 18 рыцарей и 7 лжецов.

Р	Р	Л	Р	Р
Л	Р	Р	Р	Л
Р	Р	Л	Р	Р
Л	Р	Р	Р	Л
Р	Р	Л	Р	Р

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

Пример расселения 7 лжецов и 18 рыцарей – 2 балла.

Доказано, что рыцарей не более 18 – 5 баллов.

Замечание. В примере лжецы не должны быть соседями.