11 класс

11.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $4x^2y^2 = 4xy + 3$.

Решение. См. задачу 10.2

11.2. Решите уравнение $\sqrt{-x^2+x+2}\cdot(\sin 2x - \pi\cos x) = 0$.

Ответ. $x_1 = -1;\ x_2 = 2;\ x_3 = \dfrac{\pi}{2}$**.** **Решение.** Подкоренное выражение $-x^2+x+2$ даёт два корня $x_1 = -1;\ x_2 = 2$ и определяет ОДЗ: $-1 \le x \le 2$. Приравнивая к нулю скобку $\sin 2x - \pi\cos x = \cos x(2\sin x - \pi)$, получаем совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$. Первое уравнение совокупности с учетом ОДЗ дает $x = \dfrac{\pi}{2}$, а второе решений не имеет, т.к. $\dfrac{\pi}{2} > 1$.

11.3. Сколько на параболе $y = x^2$ точек (отличных от начала координат), таких, что касательная в них пересекает обе координатные оси в точках с целочисленными координатами, не превосходящими по абсолютной величине 2020?

Ответ: 44. **Решение.** Уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке (x_0, y_0), где $y_0 = x_0^2$, есть $y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$. Отсюда находим координаты точек пересечения касательной с осями, а именно $x_1 = \dfrac{x_0}{2}$, $y_1 = -x_0^2$. Таким образом, x_0 должно быть четным числом, не превосходящим по модулю $\sqrt{2020}$. Поскольку $44 < \sqrt{2020} < 45$, то имеется 22 положительных значения x_0, а с учетом симметричных отрицательных их будет вдвое больше.

11.4. Дан тетраэдр *SABC* со взаимно перпендикулярными рёбрами *SA, SB, SC*. Пусть *O* – центр сферы, описанной около тетраэдра. Докажите, что точки *S* и *O* лежат по разные стороны от плоскости *ABC*.

Решение. Пусть $SA = a$, $SB=b$, $SC=c$. Рассмотрим декартову систему координат в пространстве с началом координат в точке *S* и осями *x*, *y*, *z* вдоль *SA*, *SB* и *SC* соответственно. Тогда плоскость *ABC* будет иметь уравнение $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (это уравнение плоскости в отрезках; можно непосредственно проверить, что точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ и $C(0,0,c)$ удовлетворяют этому уравнению). Центр сферы имеет координаты $O\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2},\dfrac{c}{2}\right)$: проще всего это показать, если рассмотреть прямоугольный параллелепипед с ребрами *SA*, *SB* и *SC*. Его центр – точка *O*: она равноудалена от всех восьми вершин параллелепипеда и, в частности, от *S*, *A*, *B* и *C*. Подставляя в выражение $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1$ координаты точки *S* и *O*, получим, соответственно, –1 и 1/2. Поскольку это числа разных знаков, точки *S* и *O* лежат по разные стороны от плоскости *ABC*.

11.5. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{x} - \sqrt{2-x} + 2\sin x$.

Ответ: $[-\sqrt{2};\sqrt{2}+2\sin 2]$. **Решение.** Область определения функции $y = f(x)$ – это отрезок [0,2]. Докажем, что на интервале (0;2) производная $f'(x)$ положительна и значит, функция $f(x)$, непрерывная на [0,2], монотонно возрастает. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}} + 2\cos x.$$

Очевидно, $f'(x) > 0$ для $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, т.к. все слагаемые положительны. Проверим, что и на полуинтервале $\left[\dfrac{\pi}{2};2\right)$ будет $f'(x) > 0$. Для этого в следующих оценках мы используем очевидные неравенства $\sqrt{2} < 1{,}5$ и $\pi > 3$, а также монотонное убывание функции $\cos x$ во второй четверти. При всех $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};2\right)$ будем иметь

$\frac{1}{2\sqrt{x}} > \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{2\cdot 1{,}5} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$ и $\cos x > \cos 2 > \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Таким образом, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}} + 2\cos x > \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ при всех $x \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\right)$. Значит, непрерывная функция $f(x)$ монотонно возрастает на [0;2], откуда следует ответ.