Муниципальный тур ВСОШ олимпиады по математике
(2020/2021 уч. год)

Ответы и решения заданий

Общие критерии оценивания каждой задачи:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задания для 11 класса

Задача №1.

Решение см. решение задачи №1 для 10 класса**.**

Задача №2.

Двое играют в такую игру: за один ход игрок может прибавить к имеющемуся числу любую из девяти ненулевых цифр, от 1 до 9, и сообщить получившуюся сумму своему партнеру, который делает аналогичный ход. Вначале дано число 0. Выиграет тот, кто первым получит в сумме а) 100; б) 66. Кто выигрывает при правильной игре? Как нужно играть, чтобы выиграть?

Решение: а) Выигрывает второй, так как он может называть числа, которые будут делиться на $9 + 1 = 10$, т. е. при своем ходе завершать каждый десяток.

б) Понятно, что сейчас выигрышная стратегия есть уже у первого игрока. Остаток от деления числа 66 на $9 + 1 = 10$ равен 6. Первый игрок первым ходом должен назвать число 6, а потом последующими ходами будет называть числа, оканчивающиеся на 6. После седьмого хода им будет названо число 66.

Задача №3

Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 34 и 49 соответственно.
а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.
б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

Ответ: 8.

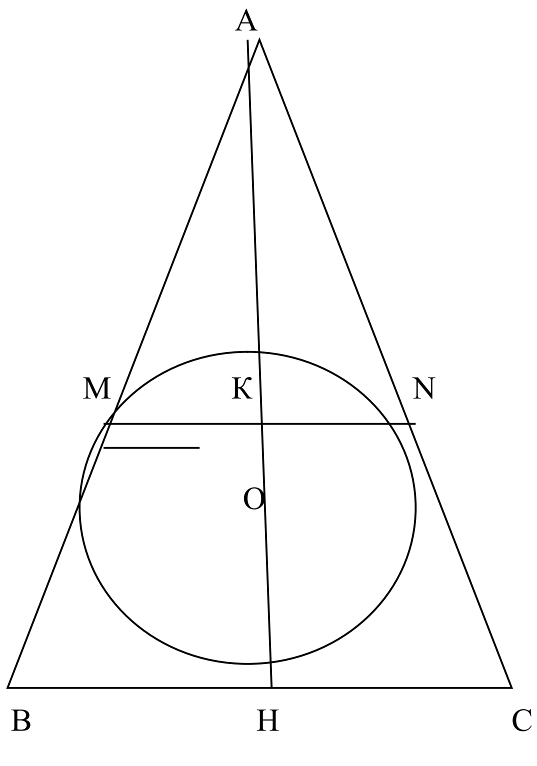
Решение

а) Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник *ABC* со *сторонами AB = AC = 49, BC = 34, AH* — высота треугольника, точки *M* и *N* — середины сторон AB и AC соответственно, K — точка пересечения AH и MN, p — полупериметр треугольника ABC. Поскольку MN — средняя линия равнобедренного треугольника, точка K — общая середина MN и AH.

Из прямоугольного треугольника ABH находим, что

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{49 - 17^2} = 8\sqrt{33},,$$

значит, $KH = 4\sqrt{33}.$



Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Тогда

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot AH}{AB + BH} = \frac{17 \cdot 8\sqrt{33}}{49 + 17} = \frac{68\sqrt{33}}{33},$$

а диаметр вписанной окружности равен $2r = \frac{136\sqrt{33}}{33}$. Очевидно, $\frac{136}{33} > 4$,

значит $2r = \frac{136\sqrt{33}}{33} > 4\sqrt{33} = KH.$

Следовательно, вписанная окружность пересекает среднюю линию MN треугольника.

б) Для вычисления длины отрезка средней линии введем систему координат на плоскости следующим образом: Ось ОХ направим по основанию треугольника, а ось ОУ по высоте. Тогда вписанная в треугольник окружность будет задана уравнением

$x^2 + \left(y - \frac{68\sqrt{33}}{33}\right)^2 = \left(\frac{68\sqrt{33}}{33}\right)^2$. А средняя линия треугольника будет задана уравнением $y = 4\sqrt{33}$. Подставляя данное значение в уравнение окружности, получим значения $x_1 = -4$ и $x_1 = 4$. Таким образом длина отрезка средней линии внутри окружности равна 8.

Задача №4

Пусть $f(x) = x^2 + 3x + 2$. *Вычислите выражение*

$$\left(1 - \frac{2}{f(1)}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{f(2)}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{f(3)}\right) \ldots \left(1 - \frac{2}{f(2019)}\right).$$

Ответ: $\frac{337}{1010}$

Решение.

В искомом произведении рассмотрим n-й множитель. Он равен

$$\left(1 - \frac{2}{f(n)}\right) = \frac{f(n) - 2}{f(n)} = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Подставляя эту дробь при n = 1, 2, …, 2019 в произведение и произведя сокращения , получим

$$\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 6} \cdot \ldots \cdot \frac{2018 \cdot 2021}{2019 \cdot 2020} \cdot \frac{2019 \cdot 2022}{2020 \cdot 2021} = \frac{1 \cdot 2022}{3 \cdot 2020} = \frac{337}{1010}.$$

Задача №5

Найдите все значения а, при которых уравнение

$$(\operatorname{tg} x + 6)^2 - (a^2 + 2a + 8)(\operatorname{tg} x + 6) + a^2(2a + 8) = 0$$

имеет на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ *ровно два решения.*

Ответ: $\left(-\sqrt{6};-2\right)$, $(-2;-1)$; 4.

Решение.

Пусть $t = tgx + 6$, тогда уравнение запишется в виде $t^2 + (a^2 + 2a + 8)t + a^2(2a + 8) = 0$, откуда $t = 2a + 8$ или $t = a^2$. Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений $tgx = 2a + 2$ или $tgx = a^2 - 6$.

Исследуем, сколько решений на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ имеет уравнение $tgx = b$ в зависимости от *b*. На промежутке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = tgx$ принимает каждое неотрицательное значение один раз, на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ функция $y = tgx$ принимает каждое значение один раз.

Таким образом, уравнение $tgx = b$ имеет на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ два решения при $b \ge 0$ и одно решение при $b < 0$.

Уравнения $tgx = 2a + 2$ и $tgx = a^2 - 6$ могут иметь общие решения при $2a + 2 = a^2 - 6$, то есть при $a = 4$ и $a = -2$. При $a = 4$ ба уравнения принимают вид $tgx = 10$ и имеют два решения на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$. При $a = -2$ оба уравнения принимают вид $tgx = -2$ и имеют одно решение на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.

При других значениях *a* исходное уравнение имеет ровно два решения на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$, если оба уравнения $tgx = 2a + 2$ и $tgx = a^2 - 6$ имеют по одному решению. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 2a + 2 < 0 \\ a^2 - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ -\sqrt{6} < a < \sqrt{6} \end{cases},$$

то есть $-\sqrt{6} < a < -1$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ при $-\sqrt{6} < a < -1$; $-2 < a < -1$ и при $a = 4$.