Муниципальный этап Российской олимпиады школьников по математике
2020-21 учебного года
11 класс *(время решения – 4 часа)*

1. Приведённые квадратные трехчлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ таковы, что у каждого из уравнений $P(x)+Q(x)=0$, $P(x)+R(x)=0$, $Q(x)+R(x)=0$ и $P(x)+Q(x)+R(x)=0$ по два корня. Для каждого уравнения нашли произведение его корней. У первых трех уравнений эти произведения оказались равны r, q и p соответственно. Чему равно произведение корней четвертого уравнения?

   Ответ. $\frac{p+q+r}{3}$.

   Решение. Пусть $P(x)=x^2+a_1x+a_0$, $Q(x)=x^2+b_1x+b_0$, $R(x)=x^2+c_1x+c_0$. Так как $P(x)+Q(x)=2x^2+(a_1+b_1)x+a_0+b_0$, то из теоремы Виета следует, что произведение корней этого квадратного трёхчлена равно $\frac{a_0+b_0}{2}$, значит $r=\frac{a_0+b_0}{2}$, $a_0+b_0=2r$. Аналогично получаем, что $a_0+c_0=2q$, $b_0+c_0=2p$. После сложения этих трёх равенств получаем $2a_0+2b_0+2c_0=2p+2q+2r$, $a_0+b_0+c_0=p+q+r$. $P(x)+Q(x)+R(x)=3x^2+(a_1+b_1+c_1)x+a_0+b_0+c_0$, значит произведение корней этого трёхчлена равно $\frac{a_0+b_0+c_0}{3}=\frac{p+q+r}{3}$.

   Комментарий. Только ответ — 2 балла.

   Получено любое из равенств $a_0+b_0=2r$, $a_0+c_0=2q$, $b_0+c_0=2p$ — 2 балла.

2. В виде суммы какого наибольшего количества последовательных натуральных чисел можно представить число 2020?

   Ответ. 40.

   Первое решение. Заметим, что $2020=2^2\cdot5\cdot101$, и 2020 не представимо в виде суммы большего чем 100 числа последовательных натуральных чисел, ведь иначе $2020>1+2+\ldots+100=\frac{101\cdot100}{2}=5050$.

   Пусть $2020=n+(n+1)+\ldots(n+k-1)$ — представление 2020 в виде суммы k натуральных чисел. Тогда $2020=\frac{(2n+k-1)k}{2}$, $k(2n+k-1)=4040$. Поэтому k является делителем числа $4040=2^3\cdot5\cdot101$. Так как $k\leqslant100$, то k будет делителем числа $2^3\cdot5=40$, то есть $k\leqslant40$. Примером для 40 слагаемых будет разложение $31+\ldots+70=\frac{(31+70)\cdot40}{2}=2020$.

   Второе решение. Заметим, что $2020=2^2\cdot5\cdot101$, и 2020 не представимо в виде суммы большего чем 100 числа последовательных натуральных чисел, ведь иначе $2020>1+2+\ldots+100=\frac{101\cdot100}{2}=5050$. Примером для 40 слагаемых будет разложение $31+\ldots+70=\frac{(31+70)\cdot40}{2}=2020$.

   Пусть число a представляется в виде суммы n чисел и $n=2k+1$. Если среднее число равно m, то $a=(m-k)+\ldots(m-1)+m+(m+1)+\ldots+(m+k)=nm$, значит a делится на n. Нечётными делителями 2020 являются только числа 1, 5, 101 и 505, при этом $n=1$ и $n=5$ дают результат, меньший чем 40, а $n=101$ и $n=505$ не дают разложения.

   Если $n=2k$, то $a=(m-k-1)+\ldots(m-1)+m+(m+1)+\ldots+(m+k-1)+(m+k)=2km+k=k(2m+1)$, значит a делится на k, и в k входят все двойки из разложения a на простые множители. Так как $2k\leqslant100$, то $k\leqslant50$, значит возможны только варианты $k=4$ и $k=20$. При $k=20$ получаем наше разложение.

   Комментарий. Только ответ — 2 балла.

   Дан ответ и указано разложение — 3 балла.

   Доказано, что количество слагаемых не более 40 — 4 балла.

3. На прямой l расположены три точки A, B и F, при этом B лежит между A и F. Квадраты $ABCD$ и $BFNT$ лежат по одну сторону от прямой l. Окружность, проходящая через точки D, B, и N, повторно пересекает прямую l в точке S, отличной от B. Докажите, что $DS = SN$.

   Решение. Без ограничения общности можно считать, что $AB > BF$, тогда точка S окажется на отрезке AB. Так как BN — диагональ квадрата $BFNT$, и DB — диагональ квадрата $ABCD$ то $\angle NBF = \angle DBS = 45°$. Четырёхугольник $DSBN$ вписанный, поэтому $\angle SDN = 180° - \angle SBN = \angle NBF = 45°$. Вписанные углы DBS и DNS опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle DNS = \angle DBS = 45°$. Итак, $\angle SDN = \angle DNS$, значит треугольник DNS равнобедренный и $DS = SN$.

   Замечание. Тот факт, что S лежит на отрезке AB, если $AB > BF$, и S лежит на BF, если $AB < BF$ доказывать не нужно.

4. На день рождения мама испекла Малышу прямоугольный пирог. Карлсон делит пирог тремя разрезами на 6 частей, при этом два разреза параллельны одной паре сторон пирога, а третий параллелен другой паре сторон. Затем Малыш забирает самую большую и самую маленькую часть, а Карлсон — всё остальное. Может ли Карлсон разрезать пирог так, чтобы получить более 75% пирога?

   Ответ. Нет.

   Первое решение. Будем считать, что два разреза вертикальны, и один горизонтален. Пусть отрезки на которые делится горизонтальная сторона пирога равны $a \geqslant b \geqslant c$, а отрезки на которые делится вертикальная сторона — $x \geqslant y$. Заметим, что Малыш взял части, площади которых равны ax и cy. Из неравенства $ax+cy-(ay+cx) = a(x-y)+c(y-x) = (a-c)(x-y) \geqslant 0$ следует, что части Малыша в совокупности не меньше объединения частей ay и cx. Значит доля Малыша по величине не меньше половины от столбиков с основаниями a и c. Так как $a \geqslant b$, то столбики с основаниями a и c занимают не меньше половины пирога, значит Малыш получит не меньше четверти пирога.

   Второе решение. Будем считать, что два разреза вертикальны, и один горизонтален. Пусть отрезки на которые делится горизонтальная сторона пирога равны $a \geqslant b \geqslant c$, а отрезки на которые делится вертикальная сторона — $x \geqslant y$. Сделаем горизонтальный разрез средней линией. Если t — расстояние между старым и новым разрезами, то большая из частей Малыша уменьшится на at, а меньшая увеличится на ct, значит доля Малыша не увеличится. Так как 5 и 6 доли стали равны, но при новом разрезании Малыш получит 1 и 5 по величине части. Но большая часть взятая 4 раза не меньше суммы первых 4 по величине частей, а 5 часть взятая 4 раза не меньше суммы 5 и 6 части. Поэтому при новом разрезании Малыш получил не менее четверти пирога, значит и при старом разрезании он получал не менее четверти пирога.

   Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

   Доказано, что Малыш получит не менее $\frac{1}{6}$ части пирога — 0 баллов.

   Доказано, что усреднение двух больших горизонтальных отрезков не приводит к уменьшению доли Карлсона — 1 балл.

   Доказано, что усреднение двух вертикальных отрезков не приводит к уменьшению доли Карлсона — 2 балла.

   Баллы по предыдущим двум пунктам суммируются.

   Замечание. Карлсон может получить долю, сколь угодно близкую к 75% пирога.

5. В клетчатом квадрате 1000×1000 в синий цвет покрашено 2000 клеток. Докажите, что найдутся 4 синих клетки, центры которых лежат в вершинах параллелограмма.

Решение. Будем доказывать задачу для квадрата $n \times n$ и $2n$ покрашенных клеток. Будем считать, что расстояние между двумя клетками равно расстоянию между центрами этих клеток. Рассмотрим столбец, в котором k синих клеток. Всего есть $k-1$ расстояний от нижней синей клетки этого столбца до его остальных синих клеток, и все эти расстояния попарно различны. Рассмотрим все такие расстояния в непустых столбцах. Пусть у нас m непустых столбцов и в i-м непустом столбце находится k_i синих клеток. Тогда расстояний всего $(k_1-1)+(k_2-1)+\ldots+(k_m-1) = k_1+k_2+\ldots+k_m-m = 2n-m \geqslant 2n-n = n$. Заметим, что каждое из расстояний не больше расстояния от нижней строки до верхней, то есть не больше чем $n-1$. Поэтому если все расстояния различны, то их не более чем $n-1$. Значит хотя бы два расстояния одинаковы. Рассмотрим две пары клеток, для которых эти расстояния одинаковы. Так как одинаковые расстояния не достигаются в одном столбце, то эти две пары не лежат в одном столбце. Рассмотрим четырёхугольник с вершинами в центрах этих клеток. Вертикальные отрезки этого четырёхугольника окажутся равны, и так как они параллельны, то этот четырёхугольник будет параллелограммом.

Комментарий. Доказано, что если в столбце (или строке) k синих клеток, то в этом столбце есть по крайней мере $k-1$ попарно различных расстояний между синими клетками — 2 балла.