11 класс

1. На острове рыцарей и лжецов (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) каждый болеет ровно за одну футбольную команду. В опросе приняли участие все жители острова. На вопрос «Болеете ли Вы за «Ростов»?» ответили «Да» 40% жителей. На аналогичный вопрос про «Зенит» утвердительно ответили 30%, про «Локомотив» - 50%, а про ЦСКА - 0%. Какой процент жителей острова действительно болеет за «Ростов»?

   Решение. Пусть $x\%$ жителей острова составляют лжецы. Тогда $(100-x)\%$ составляют рыцари. Так как каждый рыцарь утвердительно ответил ровно на один из вопросов, а каждый лжец - на три, то $(100-x)+3x=40+30+50$, откуда $x=10$. Так как ни один из жителей острова не сказал, что болеет за ЦСКА, то все лжецы болеют за ЦСКА. Каждый из них заявил, что болеет за «Ростов», поэтому действительно болеют за «Ростов» 40% - 10% = 30% жителей. **Ответ: 30%.**

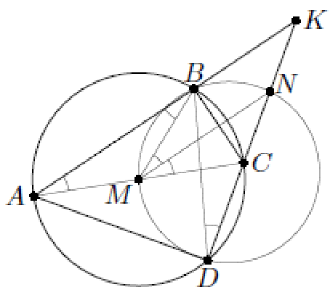
2. Можно ли таблицу размером $n \times n$ заполнить числами -1, 0, 1 так, чтобы суммы во всех строках, во всех столбцах и на главных диагоналях были различными? Главными диагоналями таблицы называются диагонали, проведённые из левого верхнего угла таблицы в правый нижний и из правого верхнего угла таблицы в левый нижний.

   Решение. Всего рассматриваются $2n+2$ суммы. Заметим, что каждая из этих сумм – целое число, наибольшая возможная сумма равна $n=1+1+1+...+1$ (n единиц), а наименьшая сумма равна $-n=-1+(-1)+...+(-1)$ (n минус единиц). На отрезке $[-n;n]$ расположено ровно $2n+1$ целых чисел. Тогда, по принципу Дирихле, хотя бы две суммы будут равны. **Ответ: нельзя.**

3. Докажите, что если $a^2+pa+q=0$ и $b^2-pb-q=0$, где $q \neq 0$, то уравнение $x^2+2px+2q=0$ имеет корень, заключенный между числами a и b.

   Решение. Из условий $q=-a^2-pa$, $q=b^2-pb$, $q \neq 0$ сразу следует, что $a \neq 0$, $b \neq 0$. Пусть $f(x)=x^2+2px+2q$, тогда $f(a)=a^2+2pa+2q=2(a^2+pa+q)-a^2=-a^2<0$, $f(b)=b^2+2pb+2q=-2(b^2-pb-q)+3b^2=3b^2>0$, значит, непрерывная функция f имеет корень, заключенный между a и b.

4. Пусть четырёхугольник $ABCD$ – вписанный. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины M и N отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?



   Решение. Заметим, что MN – средняя линия в треугольнике AKC, поэтому $\angle BAC = \angle NMC$. Кроме того, $\angle BAC = \angle BDC$, так как четырёхугольник $ABCD$ – вписанный. Пусть точки M и N лежат с одной стороны от прямой BD. Тогда M лежит внутри треугольника BCD и, тем более, внутри треугольника BND, а значит, и внутри его описанной окружности. Но тогда точки B, N, D и M не могут лежать на одной окружности. Значит, N и M лежат по разные стороны от BD, и $\angle BDC = \angle BMN$.

Из параллельности MN и AK вытекает, что $\angle BMN = \angle ABM$, откуда $\angle BAC = \angle BDC = \angle ABM$. Отсюда получаем $AM = MB$, то есть в треугольнике ABC медиана BM равна половине стороны АС. Следовательно, $\angle ABC = 90°$, а значит и $\angle ADC = 90°$. **Ответ:** $90°$.

Комментарий. При верном решении отсутствуют рассуждения о расположении точек N и M относительно отрезка BD – снять 2 балла.

5. Ученик нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причем 50 из них рациональные, а 50 – иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около ее строки и ее столбца (как в таблице умножения). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могло оказаться рациональными числами?

   Решение. Покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1225. Предположим, что среди рациональных чисел есть ноль и он записан у верхней стороны таблицы.

   Пусть вдоль левой стороны таблицы выписаны x иррациональных и $50 - x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны записаны $50-x$ иррациональных чисел и x рациональных чисел, среди которых есть 0. Заметим, что произведение ненулевого рационального и иррационального чисел всегда иррационально. Тогда в таблице есть как минимум $x(x-1)+(50-x)^2$ иррациональных чисел. Рассмотрим функцию $f(x) = x(x-1)+(50-x)^2 = 2x^2 - 101x + 2500$. Вершина параболы $f(x)$ находится в точке с абсциссой $\frac{101}{4} = 25,25$, поэтому минимальное значение $f(x)$ в целой точке достигается при $x = 25$ и оно равно $25 \cdot 24 + 25^2 = 1225$.

   Если же ноль заменить ненулевым рациональным числом, то количество иррациональных чисел только увеличится. Поэтому в таблице в любом случае не менее 1225 иррациональных чисел. Значит, в таблице не более $2500 - 1225 = 1275$ рациональных чисел.

   Осталось привести пример таблицы, в которой 1275 рациональных чисел. Если вдоль левой стороны написать числа $1, 2, \ldots, 24, 25, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \ldots, 24\sqrt{2}, 25\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны написать числа $0, 26, 27, \ldots, 49, 26\sqrt{2}, 27\sqrt{2}, \ldots, 50\sqrt{2}$, то тогда иррациональными будут только $25 \cdot 24 + 25^2 = 1225$ произведений ненулевого рационального и иррационального чисел. **Ответ: 1275.**