МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 2020-2021 уч. год
11 класс
(4 часа)

1. Математик и физик стартовали одновременно и побежали по беговой дорожке к финишу. После финиша математик сказал: «Если бы я бежал в два раза быстрее, то опередил бы физика на 12 секунд». А физик после финиша сказал: «Если бы я бежал в два раза быстрее, то опередил бы математика на 36 секунд». На сколько секунд победитель опередил второго участника?
__Ответ:__ 16.
__Решение:__ Примем время, за которое математик пробежал всю дистанцию, за $2x$ секунд, а время физика – за $2y$ секунд. Тогда при условии, что математик бежал бы в два раза быстрее, получаем $2y - x = 12$. А из условия, что физик бежал бы в два раза быстрее, получаем $2x - y = 36$. Отсюда получаем, что $x + y = 48$. Тогда $3x = 84$, $x = 28$, $y = 20$. Значит, $2x - 2y = 16$.
Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Только верный ответ – 0 баллов.
Если правильно получена система уравнений – 3 балла.
Если допущена вычислительная ошибка – 5 баллов.
Если верное решение – 7 баллов.

2. На острове живут 7 аборигенов, которые знают математику и физику, 6 аборигенов, которые знают физику и химию, 3 аборигена, которые знают химию и математику, и 4 аборигена, которые знают физику и биологию. Сколькими способами можно набрать команду из трёх человек, которые вместе знают хотя бы три предмета из четырёх? Четыре предмета: математика, физика, химия и биология.
__Ответ:__ 1080.
__Решение.__
Выберем трёх человек. Если в эту тройку попали представители хотя бы двух различных групп аборигенов, то они все вместе знают не менее трёх предметов. Если в эту тройку попали представители только одной группы, то они все вместе знают только два предмета.
Значит, найдём число всевозможных троек и вычтем из него число троек из представителей одной группы. Всего их 7+6+3+4=20.
Первого можно выбрать 20 способами, второго – 19 способами, третьего – 18 способами. Всего по правилу умножения 20×19×18. При этом выбранных аборигенов можно перенумеровать по-разному. Первым назначить любого аборигена 3 способами, вторым назначить – 2 способами, третьего – 1 способом. Всего 6 способов нумерации.
По правилу умножения 3×2×1=6. Следовательно, из-за нумерации аборигенов получается по 6 одинаковых команд. Поэтому общее число троек равно (20×19×18):6=20×19×3=1140.
Троек из представителей первой группы будет (7×6×5):6=35.
Троек из представителей второй группы будет (6×5×4):6=20.
Троек из представителей третьей группы будет (3×2×1):6=1.
Троек из представителей четвёртой группы будет (4×3×2):6=4.
Тогда нужных нам команд будет 1140 – (35+20+1+4)=1080.
Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*

Только верный ответ, без обоснования – 1 балл.
Найдено только число всевозможных троек из представителей двух групп – 3 балла.
Найдено только число всевозможных троек из представителей одной группы – 3 балла.
Решение доведено до конца с вычислительной ошибкой – 5 баллов.
Если верное решение – 7 баллов.

3. Докажите, что для любых положительных чисел x, y и z справедливо неравенство

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\leq\frac{4}{3}.$$

<u>Решение.</u>
Используем лемму.
Лемма. Если $a>0,\ b>c>0$, то $\frac{c}{b}<\frac{c+a}{b+a}$.
Тогда получим

$$\frac{x}{x+2y+3z}\leq\frac{3x+y}{3x+3y+3z}$$
$$\frac{y}{y+2z+3x}\leq\frac{3y+z}{3y+3z+3x}$$
$$\frac{z}{z+2x+3y}\leq\frac{3z+x}{3z+3x+3y}$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\leq\frac{4x+4y+4z}{3x+3y+3z}=\frac{4}{3}.$$

<u>Критерии.</u> *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если верное решение – 7 баллов.

4. Серединный перпендикуляр к стороне *AB* вписанного четырёхугольника *ABCD* пересекает диагональ *AC* в точке *P*. Серединный перпендикуляр к стороне *CD* пересекает диагональ *BD* в точке *Q*. Докажите, что *PQ* || *AD*.

<u>Решение.</u> Так как четырёхугольник *ABCD* – вписанный, а треугольники *ABP* и *DCQ* – равнобедренные, то ∠*ABP* = ∠*BAP* = ∠*CDQ* = ∠*DCQ* (см. рис. 1). Углы *BPC* и *CQB* являются внешними к треугольникам *ABP* и *DCQ* соответственно, значит, ∠*BPC* = ∠*ABP* + ∠*BAP* = ∠*DCQ* + ∠*CDQ* = ∠*CQB*. Следовательно, точки *B*, *C*, *Q*, *P* лежат на одной окружности и ∠*CBQ* = ∠*CPQ*.
Но ∠*CBQ* = ∠*CAD*, поэтому ∠*CPQ* = ∠*CAD*, из чего следует, что *PQ* || *AD*.

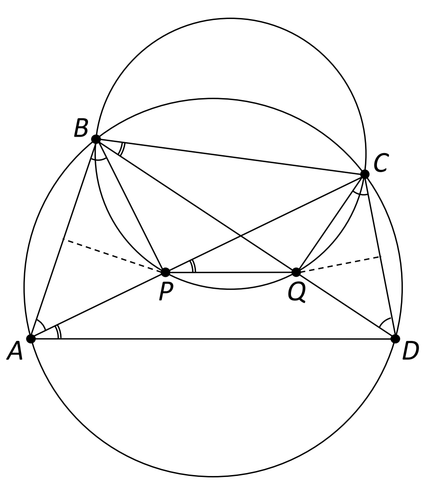


Рис. 1

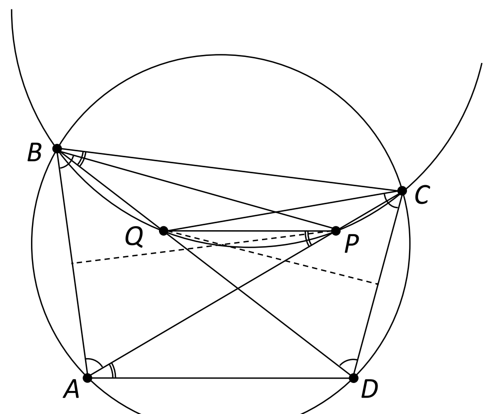


Рис. 2

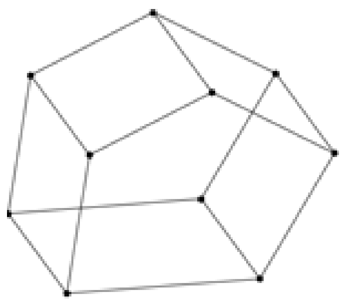
Для случая, когда точки P и Q расположены, как показано на рис. 2, рассуждения практически ничем не отличаются.

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если найдена вспомогательная окружность – 4 балла.
Если верное решение – 7 баллов.

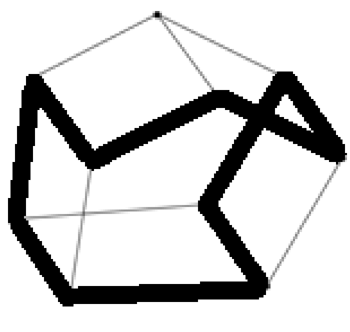
5. Островландия состоит из десяти островов, некоторые из которых соединены между собой двусторонними авиалиниями. Если выбрать любые 9 островов, то можно облететь их один за другим и в конце вернуться на начальный остров. Найдите минимальное количество авиалиний, которое может быть в этом государстве.

Ответ: 15 авиалиний.

Решение. *Оценка.* Пусть острова A и B связаны авиалинией. Если мы выбираем для обхода 9 островов – все, кроме A, – то через B проходит кольцевой путь, то есть B связан авиалиниями ещё как минимум с двумя островами. Итак, из B выходит не менее трёх авиалиний, и аналогичное утверждение справедливо для каждого острова. Тогда авиалиний не менее чем $\frac{10\cdot 3}{2}=15$.



Пример на 15 авиалиний – расположение островов в вершинах пятиугольной призмы. Обозначим вершины призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ и приведём пример цикла, который получается при удалении одного города (например, E_1, так как все города равноправны): $A - A_1 - B_1 - B - C - C_1 - D_1 - D - E - A$. Цикл построен, значит, эта конфигурация удовлетворяет условию задачи.



Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Только верный ответ – 0 баллов.
Если есть только верный пример без обоснования – 2 балла.
Если есть только верный пример с обоснованием – 3 балла.
Если есть только верная оценка – 4 балла.
Если верное решение – 7 баллов.