МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ТУР
2020 — 2021 УЧ. Г.

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ
11 класс

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1) Максимальная оценка за каждую задачу — **7 баллов**.

2) **7 баллов** ставится за безукоризненное решение задач;

6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение.

4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом.

2 или 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении.

1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален.

Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в **0 баллов**, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школь-

ник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т. п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты — **varyag2@mail.ru**, тел. **+7 922 035 03 24**).

11 КЛАСС

11.1 *Машина двигалась в одном направлении. При этом за любой промежуток времени в 1 час она перемещалась ровно на 60 км. Могла ли она за $2,5$ часа проехать больше 175 км? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть машина полчаса едет, потом полчаса стоит, снова полчаса едет, полчаса стоит, и ещё полчаса едет. Тогда за любой временной интервал $(t;\, t+1)$ (t в часах) она находится в движении ровно половину этого времени. Если машина движется при этом с постоянной скоростью 120 км/ч, условие задачи выполнено, а всего за 2,5 часа машина проедет 180 км.

Ответ: Могла.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
В математически верном примере машина движется вопреки законам физики (например, мгновенно перемещается на ненулевое расстояние)	баллов не снижать
Построен верный пример, но не обосновано, что за любой час машина проезжает ровно 60 км	5 баллов
Неверный или необоснованный ответ	0 баллов

11.2 *Пусть* $x \in \mathbf{R}$. *Докажите, что числа* $x+\sqrt{3}$ *и* $x^3+5\sqrt{3}$ *не могут быть одновременно рациональными.*

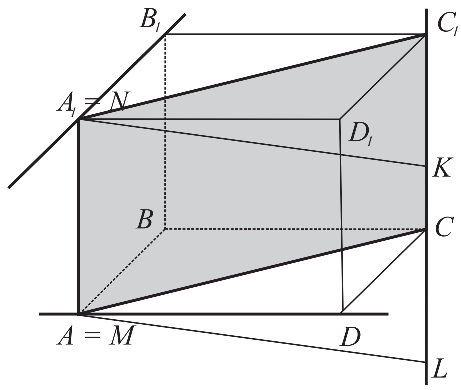
Решение. Предположим противное, и пусть числа $a = x+\sqrt{3}$ и $b = x^3+5\sqrt{3}$ — рациональны. Тогда $x = a-\sqrt{3}$, $x^3 = a^3-3\sqrt{3}a^2+9a-3\sqrt{3}$, $b = a^3+9a+\sqrt{3}(-3a^2+2)$. Число $\sqrt{3}(-3a^2+2) = b-a^3-9a$ рационально, число $-3a^2+2$ — тоже, а число $\sqrt{3}$ — нет. Это возможно только в случае $-3a^2+2=0$, но тогда $a = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ — число иррациональное. Противоречие.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верное доказательство	7 баллов
Не доказано, что корень (любой степени) из целого числа число либо целое, либо иррациональное	баллов не снижать
Условие задачи верно сведено к уравнению вида $x \cdot y = z$, где числа y и z рациональны, а число x — иррационально, но случай $y = z = 0$ не рассмотрен	4 балла
Условие задачи верно сведено к уравнению в целых числах, но не показано, что это уравнение не имеет решений	2 балла
Выкладки, из которых ход решения не просматривается	0 баллов

11.3 *Даны три скрещивающиеся попарно перпендикулярные прямые. Расстояние между каждыми двумя из них равно a. Найдите площадь параллелограмма, две вершины которого расположены на одной прямой, а две оставшиеся — на двух других прямых.*

Решение. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Можно считать, что данные скрещивающиеся попарно перпендикулярные прямые — это в точности прямые AD, A_1B_1 и CC_1 — см. рисунок. Так же можно полагать, что мы рассматриваем параллелограмм $KLMN$ две вершины которого K и L лежат на прямой CC_1 (M и N — на прямых AD и A_1B_1 соответственно). Заметим, что одним из таких параллелограммов является прямоугольник AA_1C_1C. Его площадь считается тривиально:

$$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}.$$



К решению задачи 11.3

Покажем, что любой другой удовлетворяющий условию параллелограмм имеет такую же площадь.

Прямая MN параллельна прямой KL (противоположные стороны параллелограмма параллельны), которая проходит через ребро CC_1. Значит, прямая MN перпендикулярна обеим прямым AD и A_1B_1 и обе их пересекает. Такая прямая единственна; единственным образом определяются и точки её пересечения с прямыми AD и A_1B_1. Значит, всегда $M = A$ и $N = A_1$.

Точки K и L однозначно не определяются. Например, точку K можно поместить на любое место прямой CC_1. Правда, после этого точка L строится однозначно (лучи KL

и NM сонаправлены, отрезки KL и MN равны. По сути мы доказали, что отрезок KL может располагаться в любом месте прямой CC_1.

Остаётся заметить, что при любом таком положении отрезка не меняется длина стороны $KL = MN$ и не меняется высота параллелограмма, опущенная из точки M — это отрезок AC.

Ответ: $a^2\sqrt{2}$.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются ошибки в формулах и/или вычислениях, возможно, приведшие к неверному ответу	-1 балл за каждую ошибку
Имеется идея рассмотреть параллелепипед (куб) с рёбрами, лежащими на данных скрещивающихся прямых	2 балла
Задача верно решена в частных случаях (например, когда параллелограмм является прямоугольником)	1 балл

11.4 *Пираты во главе с Джоном Сильвером на Острове сокровищ нашли шкатулку Билли Бонса, в которой было* 40 *монет достоинством* 1 *дукат и* 40 *монет достоинством* 5 *дукатов. Джон Сильвер пока ещё сам не решил, как поделить эти деньги между всеми пиратами (себе он ничего брать не хочет). При каком наибольшем количестве пиратов любое его решение по дележке монет может быть осуществлено (каждый пират должен получить целое число дукатов; возможно, кому-то из пиратов Сильвер денег вообще не даст)? Ответ обоснуйте.*

Решение. Покажем, что если пиратов не больше 11, то Сильверу удастся поделить монеты так, как ему захочется. Действительно, пусть i-му пирату надо выдать S_i монет. $S_i = 5x_i + a_i$, для некоторых целых x_i и a_i (a_i — остаток от деления S_i на 5). Заметим, что сумма всех S_i равна 240 дукатам, поэтому сумма всех a_i кратна 5. Каждое из чисел a_i не больше 4, так что сумма a_i не больше 44, и, будучи кратной 5, не больше 40. Выдадим все a_i однодукатовыми монетами — их хватит. Теперь остаётся выдать каждому пирату сумму, кратную 5 дукатам. Это легко делается, поскольку однодукатовых монет останется количество, кратное 5.

Если пиратов 12 или более, капитан не сможет выплатить, например такие суммы: 10 пиратам по 4 дуката, одному — три дуката и одному — всё остальное, 197 дукатов. Действительно, первым 11-и пиратам можно выдавать только однодукатовые монеты, и их нужно для этого не менее 43.

Ответ: 11 пиратов.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Верное обоснование, что при любом числе пиратов, меньшем 12 и любом решении Сильвера распределение осуществимо плюс пример распределения на 12 человек, которое не осуществимо (если его неосуществимость не доказана)	4 балла
Верное обоснование, что при любом числе пиратов, меньшем 12 и любом решении Сильвера распределение осуществимо	3 балла
Верный пример, когда не удастся распределить монеты при 12 пиратах (с доказательством невозможности этого)	2 балла
Верный пример, когда не удастся распределить монеты при 12 пиратах (без доказательства невозможности этого)	1 балл
Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием ИЛИ примеры невозможности распределения денег при количестве пиратов, большем 12	0 баллов

11.5 *Уравнение* $(x+a)(x+b)=-9$ *имеет корень* $x_0=ab$ $(a,\ b<0)$. *Докажите, что* $a+b<-6$.

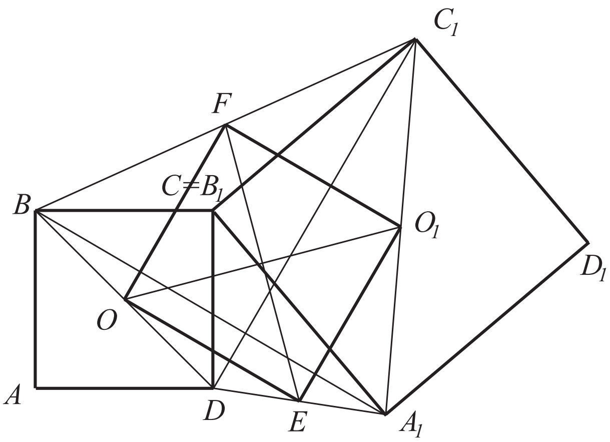
Решение. Способ 1. По условию $(ab+a)(ab+b)=-9$, что равносильно уравнению $ab(ab+a+b+1)=-9$. Пусть $ab=t$, $a+b=p$. Тогда $t^2+pt+t+9=0$, откуда $p=-t-1-\dfrac{9}{t}$. Число t положительное, как произведение двух отрицательных чисел. Тогда $p=-7-\left(\sqrt{t}-\dfrac{3}{\sqrt{t}}\right)^2\leqslant -7<-6$.

Способ 2. Рассмотрим график функции $y=(x+a)(x+b)$. Он является параболой вида $y=x^2$, сдвинутой вправо и вниз. При этом парабола пересекает прямую $y=-9$, значит, сдвиг вниз был не менее, чем на 9 единиц. Тогда ось абсцисс парабола пересекает по отрезку длины по крайней мере 6 (следует из геометрических соображений). Точки пересечения с осью абсцисс имеют координаты $(-a;\,0)$ и $(-b;\,0)$. Без ограничения общности, можно полагать $b<a<0$, поэтому $-b+a\leqslant 6$. Тогда $b-a\geqslant -6$, $b+a-2a\geqslant -6$, и (так как a отрицательно), $b+a<b+a-2a\leqslant -6$.

Примечание. В решении (способ 1) доказано более сильное неравенство, а именно $a+b\leqslant -7$. Это неравенство усилить уже нельзя, так как в случае $a=\dfrac{-7-\sqrt{37}}{2}$, $b=\dfrac{-7+\sqrt{37}}{2}$ оно обращается в равенство, а условие задачи при этом выполнено.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Доказано более сильное неравенство, чем требуется	баллов не повышать
Переход к новым переменным $t = ab$ и $p = a + b$ ИЛИ попытка анализа графика функции $y = (x + a)(x + b)$	2 балла
Выкладки и рассуждения из которых ход решения не виден	0 баллов

11.6 *Квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (вершины названы по часовой стрелке) лежат в одной плоскости и совпадают вершинами C и B_1 (других общих точек у этих квадратов нет). Точки O и O_1 — центры квадратов. Докажите, что прямая OO_1 пересекает отрезки A_1B и C_1D под равными углами.*



К решению задачи 11.5

Решение. Рассмотрим поворот на $90°$ с центром в точке $C = B_1$. При таком движении точка B перейдёт в точку D, точка A_1 — в точку C_1, отрезок BA_1 — в отрезок C_1D. Значит, отрезки BA_1 и C_1D равны и перпендикулярны.

Пусть точки E и F — соответственно середины отрезков DA_1 и C_1B см. рисунок. Рассмотрим четырёхугольник BDA_1C_1. Так как отрезки OF, FO_1, O_1E и EO являются средними линиями треугольников BDC_1, C_1A_1B, A_1DC_1 и A_1DB соответственно, четырёхугольник FO_1EO является параллелограммом со сторонами, параллельными диагоналям четырёхугольника BDA_1C_1, и равными их половинам (это содержание *теоремы Вариньона*). Так как диагонали BA_1 и C_1D равны и перпендикулярны, четырёхугольник, FO_1EO будет квадратом. Тогда треугольник OEO_1 — равнобедренный и прямоугольный. Значит $\angle EOO_1 = \angle EO_1O = 45°$.

Остаётся заметить, что ввиду параллельности прямых O_1E и C_1D, а также прямых OE и BA_1 углы $\angle EOO_1$ и $\angle EO_1O$ равны углам между прямой OO_1 и прямыми A_1B и C_1D соответственно.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	**ОЦЕНКА**
Верное доказательство	7 баллов
Теорема Вариньона используется без доказательства	баллов не снижать
Доказательство не завершено, но рассмотрены оба объекта: а) движение (поворот) переводящее отрезок A_1B в отрезок C_1D; б) четырёхугольник с вершинами в центрах квадратов и серединах сторон BC_1 и DA_1	5 баллов
Рассмотрено одно из двух: а) движение (поворот) переводящее отрезок A_1B в отрезок C_1D; б) четырёхугольник с вершинами в центрах квадратов и серединах сторон BC_1 и DA_1	3 балла
Задача верно решена в частных случаях (например, когда квадраты равны)	1 балл
Выкладки, построения и рассуждения, из которых ход решения не виден	0 баллов