ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

11 класс

1. Ответ: 2749509870.

Решение. Перепишем условие задачи в следующем виде:

$a_{n+1} - a_n = n\sqrt{a_{n+1} - a_n}$, $\sqrt{a_{n+1} - a_n} \cdot \left(\sqrt{a_{n+1} - a_n} - n\right) = 0$,

$a_{n+1} = a_n + n^2$.

Тогда $a_2 = a_1 + 2^2 = 1^2 + 2^2$,

$a_3 = a_2 + 3^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$,

…

$a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Поэтому $a_{2020} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2020^2$.

Используя формулу $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, получим

$a_{2020} = \frac{2020 \cdot 2021 \cdot 4041}{6} = 1010 \cdot 2021 \cdot 1347 = 2749509870$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. Получено выражение, использующее формулу суммы квадратов последовательных натуральных чисел, даже если окончательно значение выражения не вычислено.
5	Верное решение. Имеются небольшие погрешности, в целом не влияющие на решение. Выявлена рекуррентная формула для нахождения члена последовательности, указан способ вычисления требуемого значения, но выражение для его вычисления не составлено.
3-4	Найдены вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. Выявлены некоторые закономерности. Выполнена попытка нахождения рекуррентной формулы, которая найдена ошибочно.
1-2	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции получен верный вывод, который не обоснован рассуждениями.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

0	Решение отсутствует.

2. *Ответ:* 2.

Решение. Рассмотрим функцию $f(a)=\sqrt[4]{1-a}-\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a+1}$. Ее областью определения является [0; 1].

<u>Первый способ</u>. Воспользуемся формулой $x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$, где $x=\sqrt[4]{a+1}$, $y=\sqrt[4]{a}$. Тогда $f(a)=\sqrt[4]{1-a}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{(a+1)^3}+\sqrt[4]{(a+1)^2}\cdot\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a+1}\cdot\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{a^3}}$.

Получим, что функция $f(a)$ убывает, так как является суммой двух убывающих функций. Следовательно, свое наибольшее значение она принимает при $a=0$, $f(0)=2$.

Преобразовать разность радикалов можно было и по-другому, используя двукратное освобождение от иррациональности в числителе:

$$\sqrt[4]{a+1}-\sqrt[4]{a}=\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a+1}+\sqrt[4]{a}}=\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a+1}+\sqrt[4]{a}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)}.$$

Можно также было доказать убывание функции $g(a)=\sqrt[4]{a+1}-\sqrt[4]{a}$ *с помощью производной. Действительно,* $g'(a)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{(a+1)^3}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)<0$ *при* $a\in(0;1)$.

<u>Второй способ</u>. Докажем, что при всех $a\in[0;1]$ $\sqrt[4]{1-a}-\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a+1}\le 2$.

Пусть $x=\sqrt[4]{1+a}$, $y=\sqrt[4]{1-a}$. Дважды воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним квадратичным для двух неотрицательных чисел: $\dfrac{x+y}{2}\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\le\sqrt[4]{\dfrac{x^4+y^4}{2}}$. Получим, что $\dfrac{\sqrt[4]{1+a}+\sqrt[4]{1-a}}{2}\le 1 \Leftrightarrow \sqrt[4]{1-a}+\sqrt[4]{a+1}\le 2$, откуда и следует доказываемое неравенство.

Равенство в нем достигается при $a=0$, поэтому 2 – наибольшее значение данного выражения.

Неравенство $\sqrt[4]{1+a}+\sqrt[4]{1-a}\le 2$ можно доказать иначе. Например, методом «от противного». Предположим, что (в тех же обозначениях) $x+y>2$, тогда $2x^2+2y^2\ge(x+y)^2>4$, то есть $x^2+y^2>2$. Аналогично, $2x^4+2y^4\ge(x^2+y^2)^2>4$, откуда $x^4+y^4>2$. В нашем случае: $x^4+y^4=1+a+1-a=2$. Полученное противоречие показывает, что $\sqrt[4]{1+a}+\sqrt[4]{1-a}\le 2$.

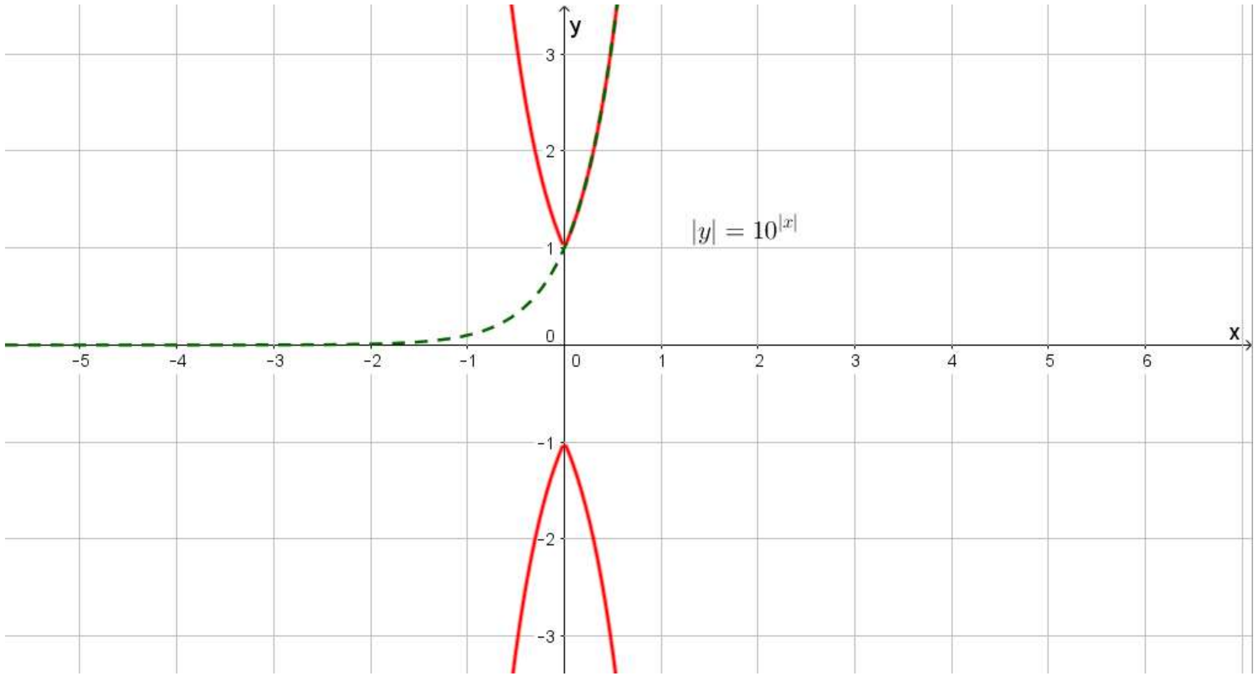
.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

3. *Решение.* Исходя из правил построения графиков функций вида $f(|x|)$ *и* $|f(x)|$, выделим ту часть графика, которая соответствует точкам с координатами (x, y) *при* $x > 0, y > 0$ и трижды отразим ее симметрично относительно осей координат.

Полученное множество точек и будет удовлетворять условию задачи (см. рисунок ниже).



Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на

	решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, полученные при преобразовании выражений, но идея решения реализована верно.
3-4	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции построена часть графика или отдельные точки.
1-2	Построен график показательной функции без учета модуля и его свойств.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

4. *Решение*. Заметим, что в пространстве все точки, равноудаленные от двух заданных точек A и B, лежат на плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной этому отрезку.

Поэтому построим такую плоскость (рис. 1).

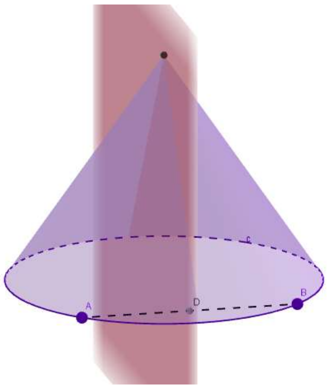


Рис. 1.

Докажем, что эта плоскость проходит через высоту конуса. Действительно, высота конуса перпендикулярна отрезку AB (по теореме о трех перпендикулярах), и любая точка на ней равноудалена от концов отрезка AB (что следует из равенства соответствующих прямоугольных треугольников, рис. 2).

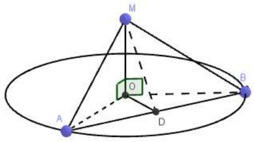


Рис. 2.

При пересечении плоскости с поверхностью конуса образуется ломаная FEH, которая и является геометрическим местом точек, лежащих на поверхности конуса и равноудаленных от точек A и B (рис. 3).

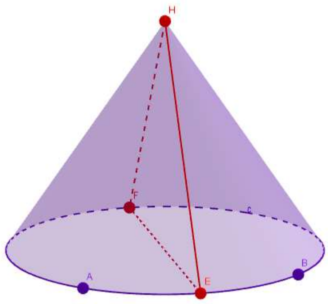


Рис. 3.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Построена фигура, удовлетворяющая требованию задачи. Некоторые из дополнительных построений не обоснованы.
3-4	Построена фигура, удовлетворяющая требованию задачи. Проведена плоскость, найдено сечение, однако их построение не комментируется.
1-2	Построен равнобедренный треугольник. Построения не обоснованы.
0	Решение отсутствует.

5. *Ответ:* нет, не могут.

Решение. Пусть S – сумма чисел, записанных в вершинах тетраэдра. Поскольку число, записанное на ребре, равно сумме чисел, записанных на его концах, и из каждой вершины исходит три ребра, то сумма чисел, записанных на ребрах, равна $3S$. Аналогично, сумма чисел, записанных на гранях, также равна $3S$, поскольку в каждой грани записана сумма чисел, записанных в вершинах, а каждая вершина принадлежит трем граням.

Предположим, что условие, о котором спрашивается в задаче, выполнено. Тогда сумма некоторых шести последовательных целых чисел равна сумме четырех последовательных целых чисел. Но первая из этих сумм – это сумма трех четных и трех нечетных чисел, и поэтому она нечетна. А вторая сумма – это сумма двух четных и двух нечетных чисел, и поэтому она четна. Следовательно, две такие суммы равными быть не могут.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.

3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.