11 класс

11.1. Дано выражение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}$, где x и y – натуральные числа. Если число x увеличить на 4, а число y уменьшить на 4, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy+4$ – квадрат целого числа.

Решение. По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{y-4}+\frac{1}{(x+4)(y-4)}$, откуда $\frac{x+y+1}{xy}=\frac{x+y+1}{(x+4)(y-4)}$. Так как $x+y+1$ положительно, то $xy=(x+4)(y-4)$. Откуда $y=x+4$. Тогда $xy+4=x(x+4)+4=(x+2)^2$.

Комментарий. Доказано, что $y=x+4$ – 2 балла.

11.2. На доске написано 4 числа. Вася умножил первое из этих чисел на $\sin\alpha$, второе – на $\cos\alpha$, третье – на $\operatorname{tg}\alpha$, четвертое – на $\operatorname{ctg}\alpha$ (для некоторого угла α) и получил набор из тех же 4 чисел (возможно записанных в другом порядке). Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано на доске?

Ответ. 3 числа.

Решение. Докажем сначала, что на доске был записан хотя бы один ноль. Действительно, пусть на доске были записаны ненулевые числа a,b,c,d, тогда их произведение $abcd$ должно равняться произведению новых чисел $abcd\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$. Но из того что $abcd\neq 0$ следует, что $1=\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$, что невозможно. Значит, среди чисел на доске есть 0. Заметим, что $\sin\alpha\cos\alpha\neq 0$ (а, значит, $|\sin\alpha|\neq 1, |\cos\alpha|\neq 1$), в противном случае $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$ был бы не определен. Если среди трех оставшихся чисел нет нуля, то аналогично предыдущему рассуждению, произведение трех тригонометрических функций равно 1. Но $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\cos\alpha\neq 1$, $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\sin\alpha\neq 1$, $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha=\cos^2\alpha\neq 1$, $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha=\sin^2\alpha\neq 1$. Поэтому на доске не меньше двух нулей, то есть различных чисел не больше 3. Ровно три различных числа могли быть, например, в такой ситуации. На доске написаны числа 0, 0, 1 и 2, и они умножались на $\sin\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{4},\operatorname{tg}\frac{\pi}{4},\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$ соответственно.

Комментарий. Доказано только, что на доске есть 0 – 1 балл.
Доказано, что на доске не более 3 различных чисел – 5 баллов.
Приведен пример с 3 различными числами – 2 балла.

11.3. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^5>y^4$ и $y^5>x^4$. Докажите, что $x^3>y^2$.

Решение. Докажем, что $x>1$ и $y>1$. Правые части неравенств неотрицательны, поэтому оба числа x и y положительны. Перемножив данные неравенства и сократив на положительное число $(xy)^4$, получим: $xy > 1$. Это означает, что по крайней мере одно из (положительных!) чисел x и y больше 1. Пусть, например, $x > 1$. Тогда из неравенства $y^5 > x^4$ следует, что $y^5 > 1$, то есть $y > 1$.

Если $x > y$, то $x^3 > x^2 > y^2$.

Если $1 < x \le y$, то $x^5 > y^4 \ge x^2 y^2$, откуда $x^3 > y^2$.

Комментарий. Доказано, что $xy > 1$ – 2 балла.

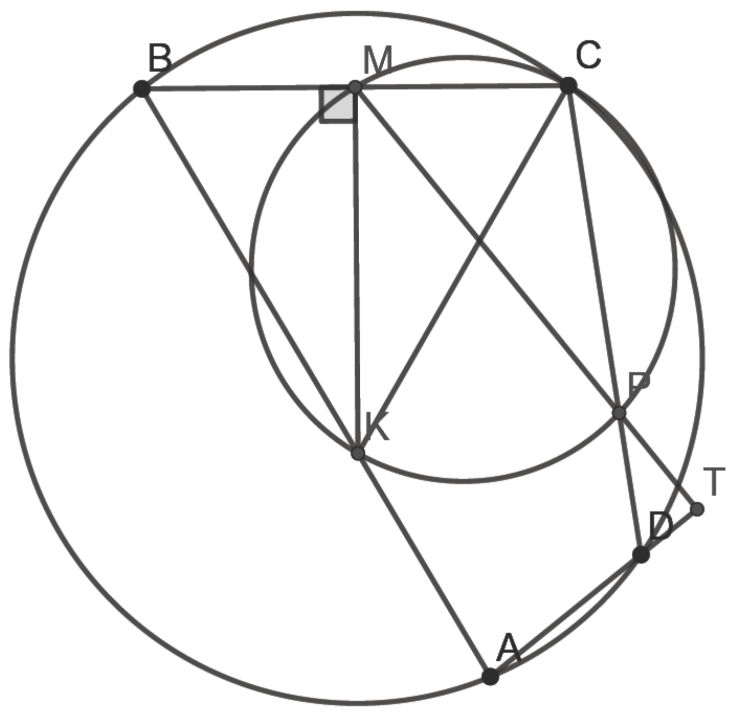
Доказано, что одно из чисел x и y больше 1 – еще 1 балл.

Рассмотрены не все случаи – не более 4 баллов.

11.4. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Перпендикуляр к стороне *BC*, проведенный через ее середину – точку *M*, пересекает сторону *AB* в точке *K*. Окружность с диаметром *KC* пересекает отрезок *CD* в точке *P* ($P \ne C$). Докажите, что прямые *MP* и *AD* перпендикулярны.

Решение. Пусть ω – окружность, построенная на *KC* как на диаметре, тогда точка *M* лежит на ω, так как угол *CMK* – прямой. Значит, $\angle CPM = \angle CKM = \alpha$ (они опираются на дугу *CM* окружности ω). Пусть *T* – точка пересечения прямых *AD* и *MP*. Будем считать, что точка *D* лежит на отрезке *AT*. Другой случай разбирается аналогично. Тогда $\angle TPD = \alpha$ (углы *TPD* и *CPM* – вертикальные). Значит, для того, чтобы доказать, что прямые *AD* и *MP* перпендикулярны, нам нужно доказать, что $\angle PDT + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$, где *T* – точка пересечения прямых *MP* и *AD*.

Но если $\angle PDT = \beta$, то $\angle PDA = \pi - \beta \Rightarrow \angle ABC = \beta$, так как четырехугольник *ABCD* – вписанный. Наконец, $BK = CK$, так как *MK* – серединный перпендикуляр к *BC*. Следовательно, $\angle KCM = \angle KBM = \beta$. А из прямоугольного треугольника *KMC* получаем $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$. Утверждение доказано.



Комментарий. Разобран только один случай расположения точки D – баллы не снимаются.

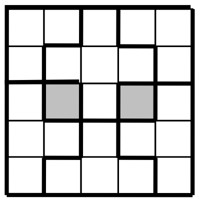
Доказано, что точка M лежит на ω –1 балл.

11.5. В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 5×5. В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

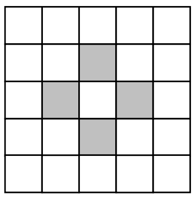
Ответ. 18 рыцарей.

Решение. Заметим, что у каждого рыцаря хотя бы один из соседей должен быть лжецом. Покажем, что лжецов должно быть не менее 7 (так мы покажем, что рыцарей не больше 18).

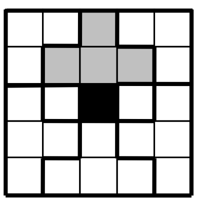
Сначала рассмотрим разбиение комнат на 6 групп (2 комнаты, отмеченные серым, не входят ни в одну из групп). В каждой группе должен быть хотя бы один лжец (иначе у одного из рыцарей группы не будет соседей лжецов). Таким образом, лжецов не меньше 6. Докажем, что их не может быть ровно 6. Предположим противное. Тогда в каждой из выделенных на рисунке групп будет ровно по 1 лжецу. А это значит, что в «серых комнатах» точно будут рыцари.



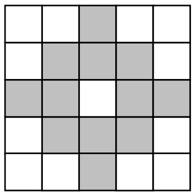
Но если сделать аналогичное разбиение, но повернутое на 90°, мы получим, что еще в двух комнатах должны жить рыцари. Эти 4 комнаты отмечены на рисунке серым. Отсюда следует, что в центральной комнате обязан жить лжец.



Так как в каждой из 6 групп разбиения должен быть ровно 1 лжец, то в комнатах, отмеченных на рисунке серым, должны жить рыцари.



Поворачивая картинку на 90°, мы получим, что рыцари должны жить в комнатах, отмеченных на рисунке серым.



Но тогда в каждой группе из 3 «угловых комнат» должно быть не меньше 2 лжецов. И всего лжецов будет не меньше 9. Получили противоречие. Значит, лжецов не меньше 7.

На рисунке показано, как могли поселиться 18 рыцарей и 7 лжецов.

Р	Р	Л	Р	Р
Л	Р	Р	Р	Л
Р	Р	Л	Р	Р
Л	Р	Р	Р	Л
Р	Р	Л	Р	Р

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Пример расселения 7 лжецов и 18 рыцарей – 2 балла.
Доказано, что рыцарей не более 18 – 5 баллов.

Замечание. В примере лжецы не должны быть соседями.