Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2020/21 учебный год

11 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Докажите, что если $\sin x > 0{,}9$, то $|\sin 2x| < 0{,}9$.

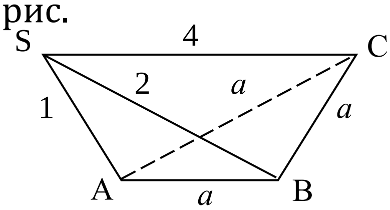
Доказательство.

$$|\sin 2x| = |2\sin x\cos x| = 2\sin x\,|\cos x| \le 2|\cos x| =$$
$$= 2\sqrt{1-\sin^2 x} < 2\sqrt{1-0{,}9^2} = 2\sqrt{0{,}19} < 0{,}9.$$

2. УСЛОВИЕ

Длины боковых рёбер треугольной пирамиды равны 1, 2 и 4. Докажите, что треугольник, лежащий в основании пирамиды, не является равносторонним.

Доказательство. Докажем, что если основанием пирамиды служит равносторонний треугольник, то длины боковых рёбер не могут составлять тройку 1, 2, 4. Допустим противное. См. рис.



Используем неравенство треугольника.

В треугольнике ASB: $SA + SB > AB$, т. е. $3 > a$.

В треугольнике ASC: $SA + AC > SC$, т. е. $a > 3a$.

Получено противоречие.

3. УСЛОВИЕ

Все целые числа от 1 до 2n выписали в строку в случайном порядке. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. Докажите, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на 2n одинаковый остаток.

Доказательство. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ – полученные суммы. Тогда $S_1 + S_2 + \ldots + S_{2n} = = 2(1+2+\ldots+2n) = 2\cdot\dfrac{1+2n}{2}\cdot 2n = (1+2n)\cdot 2n$ делится на 2n. Предположим, что остатки от деления на 2n чисел $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ все различны, т. е. дают набор $0,1,2,\ldots,2n-1$. Тогда число $S_1 + S_2 + \ldots + S_{2n}$ при делении на 2n даст такой же остаток, как сумма $0+1+2+\ldots+2n-1=(2n-1)\cdot n$, т. е. остаток n и, значит, на 2n не делится. Противоречие.

4. УСЛОВИЕ

В круг радиуса 3 произвольным образом помещены несколько кругов, сумма радиусов которых равна 25. Докажите, что найдётся прямая, которая пересекает не менее девяти из этих кругов.

Решение. Спроектируем все круги на произвольный диаметр большого круга. Сумма длин проекций равна сумме диаметров кругов, т. е. 50. Если каждая точка большого диаметра покрывается проекциями не более восьми раз, сумма их длин не превосходит $6\cdot 8=48<50$. Поэтому найдётся точка, покрытая по меньшей мере девятью проекциями. Прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно большому диаметру, – искомая.

5. УСЛОВИЕ

Последовательность натуральных чисел $q_1<q_2<q_3<\ldots$ такова, что $q_n<2n$ для любого номера n. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде разности двух чисел из этой последовательности или как число из самой последовательности.

Решение. Пусть m– произвольное натуральное число. Рассмотрим m первых членов последовательности: $q_1<q_2<\ldots<q_m<2m$. Тогда, если q_k делится на m, в силу неравенства $q_k<2m$ имеем просто $q_k=m$. Если же ни одно из чисел $q_1,q_2,\ldots,q_m$ на m не делится, то среди них найдутся два числа $q_k<q_\ell$, дающие одинаковые ненулевые остатки при делении на m. При этом разность $q_\ell-q_k$ делится на m и, значит, будучи меньше 2m, просто равна m.

6. УСЛОВИЕ

Последовательность чисел $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$ задана формулами: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{\sqrt{n}a_n}$ при $n=1,2,3,\ldots$ Докажите, что эта последовательность не ограничена (например, все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, больше миллиона).

Решение. Имеем $a_{k+1}^2=\left(a_k+\dfrac{1}{\sqrt{k}a_k}\right)^2=a_k^2+\dfrac{2}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{ka_k^2}>a_k^2+\dfrac{2}{\sqrt{k}}$.

Просуммируем эти неравенства при $k=1,2,\ldots,n$:

$a_{n+1}^2 > a_1^2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Достаточно доказать, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ является неограниченной. Это просто. Каждое слагаемое $\frac{1}{\sqrt{k}}$ не меньше $\frac{1}{\sqrt{n}}$, поэтому $x_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, а $\sqrt{n}$ неограниченно возрастает вместе с номером n.