Материалы для проведения муниципального этапа Российской олимпиады школьников по математике
в республике Башкортостан
1 декабря 2020 года

Составитель заданий: Р. Г. Женодаров

Рецензенты: к.ф.-м.н. Н. Ф. Валеев, к.ф.-м.н. К. П. Исаев,
к.ф.-м.н. В. И. Луценко

Общие указания по проверке решений олимпиадных заданий по математике.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	План решения верный и может стать полностью правильным после исправлений или дополнений
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Следует иметь в виду, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

При оценке решения задачи в первую очередь нужно исходить из общих критериев, но учитывать конкретные критерии по задачам.

Задачи, наброски решений, критерии по отдельным задачам.

6 класс

1. Указать наибольшее возможное число, в десятичной записи которого все цифры различны, а сумма его цифр равна 37.

Ответ: 976543210.

Набросок решения. Сумма всех десяти цифр равна 45, поэтому для достижения максимума исключим только одну цифру. Это будет 8. Среди девятизначных чисел больше то, у которого старшие разряды больше. Отсюда ответ.

2. Существует ли натуральное число, в записи которого встречаются только цифры 7 и 5 в равном количестве, и которое делится на 7 и 5? Ответ обосновать.

Ответ: существует.

Набросок решения. Примеры основаны на том, что 1001 делится на 7. Отсюда следует, что число вида $\overline{abcabc}=\overline{abc}\times1001$ делится на 7. Из этого: 777777555555=777777×1000000+555555.
5775=5005+770.

Например, число: 777777555555 или 5775.

Критерии. Правильный пример, без проверки делимости на 7: 6 баллов.

3. На доске 4×4 расставьте 8 рыцарей и 8 лжецов так, чтобы каждый из них мог сказать: «Рядом со мной стоит ровно один рыцарь». Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Люди стоят рядом, если в занимаемых ими клетках есть общая сторона.

	P	P	
P			P
P			P
	P	P	

Ответ: см. рис.

Набросок решения. В клетках, помеченных буквой «Р», стоят рыцари, а в пустых - лжецы.

4. Имеется контур квадрата со стороной 20см, его разрезали на две группы равных отрезков из трёх и четырёх отрезков. Какую длину имеют эти отрезки? Найти все возможные ответы.

Ответ: 20см и 5см.
Набросок решения.
Если каждая сторона квадрата разрезана хотя бы на два отрезка, то отрезков будет 8, а их 4+3=7. Значит, один из отрезков равен стороне квадрата, и таких отрезков три длиной 20 см. Четыре отрезка получаются разрезанием стороны квадрата на четыре равных отрезка, длина которых 20:4=5(см).
Критерии. Правильный ответ, без обоснования: 1балл.

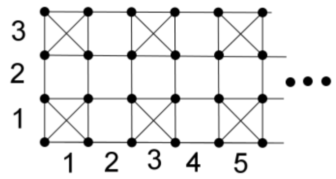
5. Имеется пять старинных монет, среди которых две поддельные. Эксперт может про любые две монеты за шоколадку указать, сколько среди них поддельных. У коллекционера Васи четыре шоколадки. Сможет ли Вася найти поддельные монеты, если эксперт требует указать ему сразу (до начала проверок) все пары монет, которые он должен проверить, и плату внести заранее?

Ответ: сможет. Набросок решения. Пронумеруем монеты числами от 1 до 5. Эксперт должен проверить следующие четыре пары монет: 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5 за четыре шоколадки. Пусть ответы были a, b, c, d. Если a+c=2, то пятая монета настоящая, в противном случае фальшивая. Если a+d=2, то третья монета настоящая, в противном случае фальшивая. Если b+d=2, то первая монета настоящая, в противном случае фальшивая. Зная, какая третья монета и сколько поддельных среди 2 и 3, 3 и 4, узнаём про монеты 2 и 4.

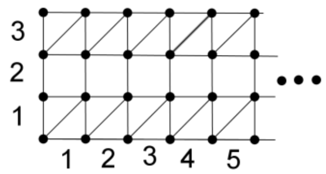
Критерии. Правильный алгоритм, без пояснений: 3 балла.

6. Прямоугольник 3×100 состоит из 300 квадратов 1×1. Какое наибольшее число диагоналей можно провести в квадратах так, чтобы никакие две диагонали не имели общих концов? (В одном квадрате можно провести две диагонали, у них не будет общих концов. Общие внутренние точки разрешены.)

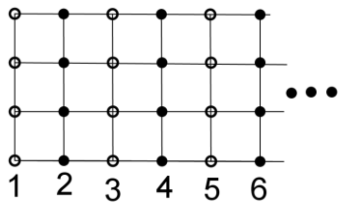
Ответ: 200.



Пример. Пронумеруем строки и столбцы, содержащие квадраты. В каждом квадрате с обоими нечётными номерами проведём по две диагонали.



Другой пример. Во всех клетках первого и третьего ряда проведем параллельные диагонали.



Оценка. Раскрасим вершины в два цвета: вершины из нечётных столбцов - в белый цвет, а четных столбцов - в чёрный (см. рис.). Белых вершин будет 200, а чёрных вершин 204. У каждой диагонали концы разного цвета, и поэтому больше, чем 200 диагоналей провести нельзя.

Критерии. Оценка без примера: 4 балла. Пример без оценки: 2 балла.