

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2020 – 2021 учебный год
Математика
7 класс

Требования к проверке работ:

- 1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;
- 2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам, в приведенных ответах и решениях к задачам олимпиады, указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Работа участника, помимо приведенных, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Ответы и решения

7.1. По кругу написано 2020 натуральных чисел. Докажите, что сумма любых 2 соседних чисел нечётна.

Решение. Сумма 2 чисел будет нечётной, если одно из них будет чётное, а другое – нечётное.

Если сумма любых 2 соседних чисел нечётна, тогда чётные и нечётные числа должны чередоваться, и общее число чисел будет чётным, а по условию чисел 2020, – чётное количество. Значит, на самом деле, в данном случае сумма любых 2 соседних чисел нечётна.

7.2. В альбоме нарисован клетчатый прямоугольник 3×7 . Робота Игоря попросили обвести все линии фломастером, и у него ушло на это 26 минут (робот рисует линии с постоянной скоростью). За сколько минут он сможет обвести фломастером все линии клетчатого квадрата 5×5 ?

Ответ. 30 минут.

Решение. Заметим, что клетчатый прямоугольник 3×7 состоит из четырёх горизонтальных линий длины 7 и восьми вертикальных линий длины 3. Тогда общая длина всех линий равна $4 \cdot 7 + 8 \cdot 3 = 52$. Получается, на сторону одной клеточки у Игоря уходит $26 : 52 = 1/2$ минуты.

Прямоугольник 5×5 состоит из шести вертикальных и шести горизонтальных линий длины 5. Таким образом, общая длина линий равна $6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 60$. Тогда у Игоря уйдёт на обводку $60 \cdot 1/2 = 30$ минут.

7.3. Имеется 9 карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Какое наибольшее количество этих карточек можно разложить в некотором порядке в ряд так, чтобы на любых двух соседних карточках одно из чисел делилось на другое?

Ответ. 8.

Решение. Заметим, что все 9 карточек положить в ряд требуемым образом не получится. Это следует из того, что у каждой из карточек с числами 5 и 7 может быть только один сосед – карточка с числом 1. Значит, обе карточки 5 и 7 должны лежать с краев, а карточка с единицей должна соседствовать с каждой из них, что невозможно.

Выбрать 8 карточек и разложить их в ряд согласно требованиям задачи можно, например, так: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5.

7.4. Карлсон пересчитывает 200 плюшек, которые испекла Фрекен Бок: «один, два, три, ..., сто девяносто восемь, сто девяносто девять, двести». Сколько всего слов он произнесет? (Каждое слово считается столько раз, сколько раз оно было произнесено.)

Ответ. 443 слова.

Решение. Одно слово потребуется для произношения 29-ти чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200.

Среди первых 99 чисел количество произносимых в два слова: $99 - 27 = 72$, соответственно, количество слов для их произнесения $2 \cdot 72 = 144$.

В следующей сотне (от 101 до 199) каждое число, произносимое в первой сотне в одно слово, будет произноситься в два, и количество слов: $2 \cdot 27 = 54$. Остальные произносятся в три слова: $3 \cdot (99 - 27) = 216$.

То есть для пересчета всех плюшек понадобится $29 + 144 + 54 + 216 = 443$ слова.

Критерии.

1 балл. Обоснованно найдено количество чисел произносимых одним словом.

2 балла. Верно и обоснованно найдено количество слов необходимых, чтобы произнести числа от 1 до 99.

2 балла. Верно и обоснованно найдено количество слов необходимых, чтобы произнести числа от 100 до 199 или 200.

Комментарий. Баллы по критериям выше суммируются.

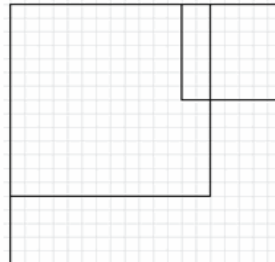
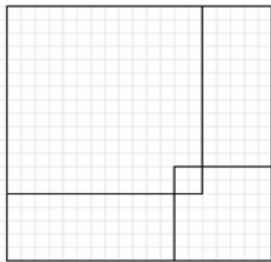
3 балла. Верный ответ без обоснований.

7.5. В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 м^2 , а когда их положили в соседние углы, то 14 м^2 . Каковы размеры зала?

Ответ. $19 \times 19 \text{ м}^2$.

Решение. В первом случае пересечением ковров является квадрат площади 4 м^2 (рис. слева), значит, длина стороны этого квадрата равна 2 м. Во втором случае, пересечение – прямоугольник, одна сторона которого также равна 2 м (рис. справа). Следовательно, другая сторона этого прямоугольника равна

$14 : 2 = 7 \text{ (м)}$, а это и есть длина стороны меньшего ковра. Значит, сторона большего ковра имеет длину 14 м. Так как стороны ковров накладываются друг на друга на 2 м, то длина стороны зала равна $7 + 14 - 2 = 19 \text{ (м)}$.



Интернет-ресурсы: <http://www.problems.ru>, <https://olimpiada.ru>.