Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2020/21 учебный год

7 класс

Ответы и решения задач

УСЛОВИЕ

1. Четыре царевны загадали по двузначному числу, а Иван загадал четырёхзначное число. После того, как они написали свои числа в ряд в каком-то порядке, получилось 132040530321. Найдите число Ивана.

Решение. Переберём варианты. Вариант 1320 не подходит по причине того, что остальная часть длинного числа разбивается на фрагменты из двух соседних цифр: 40, 53, 03, 21, а фрагмент 03 невозможен, так как не является двузначным числом. Вариант 3204 невозможен из-за недопустимого фрагмента 05 (или из-за фрагмента 1 из одной цифры). Вариант 2040 дает фрагмент 03, что невозможно. Вариант 0405 – не вариант – это трехзначное число. Вариант 4053 дает невозможный фрагмент 03. Вариант 0530 невозможен. Вариант 5303 – единственный возможный, так как вариант 3032 приводит к фрагменту из одной цифры 1.

Ответ. 5303.

УСЛОВИЕ

2. Собака из пункта *A* погналась за лисицей, которая находилась на расстоянии 30 м от собаки в пункте *B*. Скачок собаки равен 2 м, скачок лисицы – 1 м. Собака делает 2 скачка, в то время как лисица делает 3 скачка. На каком расстоянии от пункта *A* собака догонит лисицу?

Решение. За единицу времени собака пробегает $2 \cdot 2 = 4$ (м), а лисица $3 \cdot 1 = 3$ (м), значит, за единицу времени собака догоняет лисицу на 1 м. Расстояние в 30 м будет покрыто за 30 единиц времени.

Ответ. 120 м.

УСЛОВИЕ

3. Три числа *x,y,z* удовлетворяют соотношению $x^2 + y^2 = xy\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Докажите, что хотя бы одно из чисел x или y равно произведению двух других чисел.

Доказательство. По условию

$$x^2 - xyz + y^2 - \frac{xy}{z} = 0,$$

$$x(x - yz) - y\left(\frac{x}{z} - y\right) = 0,$$

$$x(x - yz) - \frac{y}{z}(x - yz) = 0,$$

$$(x - yz)\left(x - \frac{y}{z}\right) = 0.$$

Поэтому обязательно либо $x - yz = 0$, либо $x - \frac{y}{z} = 0$, т. е. $y - xz = 0$.

УСЛОВИЕ

4. В классе больше 30 человек, но меньше 40. Любой мальчик дружит с тремя девочками, а любая девочка – с пятью мальчиками. Сколько человек в классе?

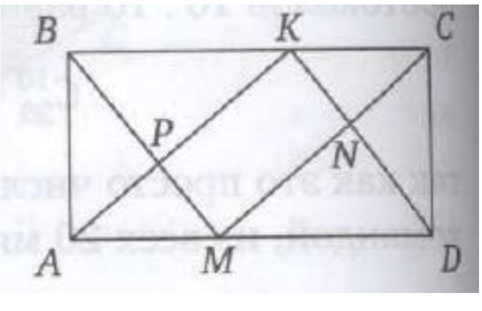
Решение. Пусть m– число мальчиков, d– число девочек, r– число дружащих пар «мальчик–девочка». По условию $r = 3m$ и $r = 5d$. Значит, r делится на 3 и 5 и таким образом на 15: $r = 15k$. Тогда $m = 5k$, $d = 3k$, а общее число учеников равно $m + d = 8k$, т. е. делится на 8. Единственным числом между 30 и 40, кратным 8, является 32.

Ответ: 32.

УСЛОВИЕ

5. Дан прямоугольник $ABCD$. На стороне BC взята точкаK, а на стороне AD взята точка M так, что $BK = DM$. Отрезки AK и BM пересекаются в точке P, а отрезки DK и CM – в точке N. Докажите, что треугольники PAB и NCD равны.

Доказательство. Из равенства треугольников ABK и CDM следует, что $\angle BAK = \angle DCM$, а из равенства треугольников BAM и DCK – что $\angle MBA = \angle KDC$. Значит, $\angle BAP = \angle DCN$и $\angle PBA = \angle NDC$.



УСЛОВИЕ

6. В клетках квадрата 3×3 Петя расставил числа 1, 2, 3, … , 9 (каждое по одному разу), а затем посчитал суммы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух диагоналей. Могли ли эти 8 сумм оказаться равными 13, 14, …, 20?

Решение. Допустим, что могли. Пусть a_1, a_2, a_3 – суммы по трём строкам. Сумма $a_1 + a_2 + a_3$ – это сумма всех чисел в квадрате, т. е. $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$. Аналогично, если b_1, b_2, b_3 – суммы по столбцам, то $b_1 + b_2 + b_3 = 45$. Поэтому $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 90$. С другой стороны, числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ – это какие-то числа из набора чисел 13, 14, …, 20 – по предположению. Тогда их сумма не меньше, чем $13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 93$. Это дает противоречие с нашим допущением.

Ответ. Нет.